

**Fakultät für Physik**

Universität Karlsruhe (TH)

**Diplomarbeit  
im Studiengang Physik**

vorgelegt von  
Jürgen Talasch  
aus Gaggenau

2003

**Erstreferent:**

Herr Prof. Dr. Karl-Heinz Kampert



# Stabilität und Struktur selbstgravitierender Akkretionsscheiben in den Zentren von (aktiven) Galaxien

Die Diplomarbeit wurde von Jürgen Talasch ausgeführt am

Institut für Theoretische Astrophysik,  
Ruprecht-Karls-Universität Heidelberg

unter Betreuung von  
Herrn Prof. Dr. Wolfgang J. Duschl

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einführung</b>	<b>2</b>
<b>2</b>	<b>Grundgleichungen</b>	<b>4</b>
2.1	Erhaltungssätze . . . . .	4
2.1.1	Kontinuitätsgleichung . . . . .	4
2.1.2	Drehimpulserhaltung . . . . .	5
2.1.3	Hydrostatisches Gleichgewicht und Zustandsgleichung . . . . .	7
2.1.4	Energieerhaltung . . . . .	10
2.1.5	Konvektion, Advektion . . . . .	13
2.2	Gravitation (Poissongleichung) . . . . .	14
2.3	Viskosität . . . . .	15
2.4	Zeitskalen und Stabilität . . . . .	18
2.4.1	Zeitskalen . . . . .	18
2.4.2	Thermische Stabilität . . . . .	20
2.4.3	Viskose Stabilität . . . . .	20
2.4.4	Gravitativ Stabilität, Toomre Parameter . . . . .	21
<b>3</b>	<b>Numerische Behandlung der stationären Scheibengleichungen</b>	<b>24</b>
3.1	Scheibengleichungen . . . . .	24
3.2	Das Newton-Raphson-Verfahren . . . . .	25
3.3	Implementierung . . . . .	26
3.3.1	Doppellösungen . . . . .	28
3.3.2	Parameter . . . . .	28
<b>4</b>	<b>Lösungen</b>	<b>31</b>
4.0.3	H <sup>-</sup> -Instabilität . . . . .	54
4.0.4	Gravitativ Stabilität . . . . .	63
4.0.5	Andere $\alpha$ - und $\beta$ -Werte . . . . .	65
4.0.6	Konsistenz . . . . .	67
4.0.7	Grenzen des Modells . . . . .	69
<b>5</b>	<b>Diskussion und Ausblick</b>	<b>70</b>
	<b>Literatur</b>	<b>72</b>

# Kapitel 1

## Einführung

Akkretionsscheiben sind mehr oder minder flache astrophysikalische Gebilde aus Materie, die um einen Zentralkörper rotieren. Sie entstehen auf unterschiedlichsten Skalen in verschiedensten Umgebungen. Da Materie im Allgemeinen Drehimpuls besitzt, ordnet sich diese unter gravitativem Einfluß auf Keplerbahnen (Ellipsen) um das Zentralobjekt. Durch Wechselwirkung der auf unterschiedlichen Bahnen um das Zentrum rotierenden Teilchen untereinander stellt sich bald eine gemeinsame Kreisbewegung ein. Entsprechend der Keplerschen Gesetze ist die Rotation differentiell und die Winkelgeschwindigkeit nimmt nach außen ab<sup>1</sup>. Benachbarte Kreisringe bewegen sich daher mit unterschiedlicher Geschwindigkeit und übertragen aufgrund von Reibung gegenseitig Drehmoment. Dieser Mechanismus bewirkt, dass Drehimpuls nach außen übertragen wird und somit Materie erst nach innen strömen kann. Letztlich wandeln so Akkretionsscheiben potentielle Energie in kinetische und thermische Energie um. Die Hälfte dieser freigesetzten Gravitationsenergie geht in die kinetische Energie des akkretierten Materials, der übrige Teil wird in der Scheibe dissipiert. Bei stationären Scheiben gleicht die Heizung durch viskose Reibung exakt die Kühlung durch Strahlung aus. Diese Energieumwandlung ist dabei sehr effektiv. Als Abschätzung des Wirkungsgrads vergleiche man die abgestrahlte Energie akkretierter Materie  $m$  mit ihrer Ruheenergie. Der letzte stabile Orbit um ein (nichtrotierendes) Schwarzes Loch liegt bei 3 Schwarzschildradien. So ergibt sich:

$$\eta_G = \frac{1}{2} \frac{GMm}{3r_s} / (mc^2) \approx 0.083 \quad . \quad (1.1)$$

Kernfusion von Wasserstoff zu Helium hat im Vergleich lediglich einen Wirkungsgrad von

$$\eta_F \approx 0.007 \quad . \quad (1.2)$$

Wie man sieht, kann die Akkretion ungeheuer effektiv Energie bereitstellen, so dass sie auch als Motor für die enorme Leuchtkraft von AGNs und Quasaren vermutet wird. Die Effizienz hängt jedoch stark von der Kompaktheit des Zentralkörpers ab. Akkretion an einen Stern wie die Sonne ist dabei einige tausend Male weniger effektiv als das nukleare Brennen. Im Großen und Ganzen sind die physikalischen Grundlagen zur Beschreibung von Akkretionsscheiben seit dem 18. Jhdt. bekannt. Erst in den 50ern erkannte man die Problematik einer molekularen Beschreibung der Viskosität, die auf Zeitskalen führte, welche die Bildung von

---

<sup>1</sup>In dieser Arbeit werden Scheiben behandelt, die in gewissen Bereichen nicht keplersch rotieren. Doch ist das Argument differentieller Rotation im Allgemeinen weiterhin gültig.

Akkretionsscheiben überhaupt nicht ermöglichen. Erst von Shakura and Sunyaev [1973] wurde eine Beschreibung auf der Grundlage turbulenter Viskosität vorgeschlagen, die sich für eine bestimmte Gruppe von Akkretionsscheiben als sehr erfolgreich erwiesen hat. Sowohl mittels Beobachtung, als auch durch theoretische Modelle am besten verstanden, sind Scheiben in Doppelsternsystemen. Während ein Partner die Entwicklung zum Weißen Zwerg (hier spricht man von Kataklysmischen Veränderlichen) oder Neutronenstern bereits durchlaufen hat und nunmehr als Zentralobjekt der Akkretionsscheibe dient, liefert sein Begleiter Material, wenn er sein Roche-Volumen überschreitet. Akkretionsscheiben spielen auch eine entscheidende Rolle in der Entwicklung protostellarer Objekte und der Entstehung von Sternsystemen nach Kollaps einer Materiewolke. Akkretionsscheiben viel größeren Ausmaßes um supermassereiche Schwarze Löcher mit bis zu  $10^{10} M_{\odot}$  (Sonnenmassen) werden in den Zentren von Aktiven Galaktischen Kernen (AGN) vermutet. Zu den AGN werden alle Objekte gezählt, die sich durch eine enorme Leuchtkraft der Kernregionen der zugehörigen Galaxien auszeichnen. Zu ihnen zählen beispielsweise Seyfert-Galaxien und Quasare. Wie oben gezeigt, könnte die Akkretion von Materie an supermassereiche Schwarze Löcher diese Leuchtkraft auf relativ kleinem Volumen erklären. Bei den "Standardscheiben" wird üblicherweise die Scheibenmasse gegenüber der des Zentralobjekts vernachlässigt. Doch schon in der Frühphase der Sternbildung ist die Scheibenmasse der Masse des Zentralobjekts vergleichbar. Und in AGN werden ausgesprochen massereiche Scheiben beobachtet, welche auch benötigt werden, um die hohen Massen der zentralen Schwarzen Löcher in AGN zu erklären, falls sie nicht primordial vorhanden gewesen sein sollten. Auch dieses rasche Anwachsen zu heute beobachteten Massen könnte durch Zustrom aus einer massereichen Akkretionsscheibe erfolgen (Duschl [2001]).

# Kapitel 2

## Grundgleichungen

Im Folgenden werden die Gleichungen und Funktionen vorgestellt, durch die eine stationäre, selbstgravitierende und dünne Scheibe beschrieben werden kann<sup>1</sup>. So werden auch Möglichkeiten und Grenzen der Scheibenphysik aufgezeigt, die in dieser Arbeit Verwendung findet.

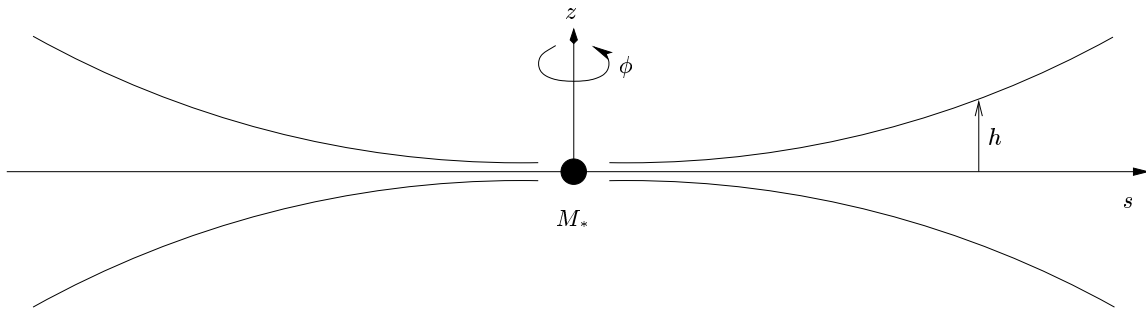


Abbildung 2.1: Schematische Darstellung einer Akkretionsscheibe um ein Zentralobjekt

### 2.1 Erhaltungssätze

#### 2.1.1 Kontinuitätsgleichung

Die Massenerhaltung beschreibt die zeitliche Änderung der Masse in einem Volumen durch Zu- bzw. Abfluss von Materie durch die Oberfläche dieses Volumens. Unter der Annahme, dass in vertikaler Richtung hydrostatisches Gleichgewicht herrscht (siehe 2.1.3), verschwindet die  $z$ -Komponente der Geschwindigkeit. Aufgrund der Rotationssymmetrie der Scheibe kann diese sogar eindimensional behandelt werden. Betrachtet wird der Massenfluss durch ein Ringelement der Scheibe. Die Masse eines Ringes ist:

$$m(s) = 2\Delta s \cdot 2\pi s \cdot \Sigma \quad . \quad (2.1)$$

---

<sup>1</sup>Die Erhaltungssätze und Zeitskalen folgen im wesentlichen den Ausführungen in Frank et al. [1992].

Bilden der Ableitung und Reihenentwicklung nach Taylor führt auf:

$$\begin{aligned}
\dot{m}(s) &= \frac{\partial}{\partial t}(2\Delta s 2\pi s \Sigma) \\
&= -v_{s+\Delta s} \cdot 2\pi(s + \Delta s)\Sigma_{s+\Delta s} \\
&\quad + v_{s-\Delta s} \cdot 2\pi(s - \Delta s)\Sigma_{s-\Delta s} \\
&= -2\pi(s + \Delta s) \left( v_s \Sigma + \Delta s \frac{\partial(v_s \Sigma)}{\partial s} \right) \\
&\quad + 2\pi(s - \Delta s) \left( v_s \Sigma + \Delta s \frac{\partial(v_s \Sigma)}{\partial s} \right) \\
&= -4\pi\Delta s \left( v_s \Sigma + s \frac{\partial(v_s \Sigma)}{\partial s} \right) = -4\pi\Delta s \frac{\partial(sv_s \Sigma)}{\partial s} .
\end{aligned} \tag{2.2}$$

Man erhält schließlich die Kontinuitätsgleichung:

$$\begin{aligned}
4\pi\Delta s \frac{\partial(s\Sigma)}{\partial t} &= -4\pi\Delta s \frac{\partial(sv_s \Sigma)}{\partial s} \\
s \frac{\partial\Sigma}{\partial t} + \frac{\partial(sv_s \Sigma)}{\partial s} &= 0 .
\end{aligned} \tag{2.3}$$

Im stationären Fall verschwindet die Zeitableitung. Integrieren der Gleichung führt auf  $sv_s \Sigma = \text{const}$ , wobei sich die Integrationskonstante mit einer Akkretionsrate  $\dot{M}$  identifizieren lässt, also der gesamten Masse, die pro Zeiteinheit mit der Radialgeschwindigkeit  $v_s$  durch die Scheibe transportiert wird.

$$\dot{M} = -2\pi s v_s \Sigma \tag{2.4}$$

Das negative Vorzeichen rührt daher, dass Masse nach innen strömt, während  $s$  nach außen hin wächst. Das hängt von der Wahl des Koordinatensystems ab. In mancher Literatur ist  $\dot{M}$  positiv gewählt, da der Massenfluss positiv zur Zentralmasse beiträgt.

## 2.1.2 Drehimpulserhaltung

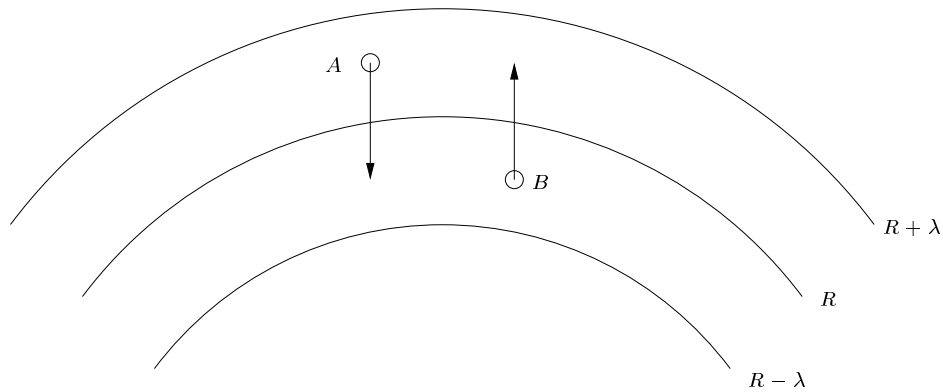


Abbildung 2.2: Viskoser Drehimpulstransport in Scherströmung

Außer Masse wird auch Drehimpuls transportiert. Betrachtet werden dazu zwei benachbarte Ringe A und B. Durch die unterschiedlichen Umlaufgeschwindigkeiten reiben die Ringe



aneinander und üben Drehmoment aus. Diese Reibung wird durch die Viskosität beschrieben, deren genaue Form leider unbekannt ist. Man behilft sich mit verschiedenen Parametrisierungen (siehe 2.3). Sei  $\lambda$  die mittlere freie Weglänge, die Material aus einem Ring in den nächsten vordringen kann, und  $\tilde{v}$  die Geschwindigkeit. Die mittleren Impulse pro Umfang zwischen den Ringen sind:

$$\begin{aligned} \text{A} \rightarrow \text{B} &: \Sigma \tilde{v}_{s+\lambda/2} v_{\phi, s-\lambda/2} \\ \text{B} \rightarrow \text{A} &: \Sigma \tilde{v}_{s-\lambda/2} v_{\phi, s+\lambda/2} \end{aligned} \quad (2.5)$$

Somit ergibt sich nach Taylorreihenentwicklung ein Nettodrehimpuls von

$$\begin{aligned} G(s) &= 2\pi s \Sigma \tilde{v} \left[ \left( s + \frac{\lambda}{2} \right) \left( v_{\phi} - \frac{\lambda}{2} v'_{\phi} \right) - \left( s - \frac{\lambda}{2} \right) \left( v_{\phi} + \frac{\lambda}{2} v'_{\phi} \right) \right] \\ &= -2\pi s \Sigma \underbrace{\tilde{v} \lambda}_{\nu} s^2 \omega' \end{aligned} \quad (2.6)$$

des inneren Rings auf den äußeren, mit der Viskosität<sup>2</sup>  $\nu$  und  $v'_{\phi} = \partial_s(s\omega) = \omega + s\omega'$ . Nimmt  $\omega$  nach außen hin ab, wie das bei Keplerrotation der Fall ist, ist  $G(s)$  positiv, d.h. der innere Ring gibt Drehimpuls an den äußeren ab und die Materie bewegt sich nach innen. Der Drehimpuls ist:

$$\mathbf{L}(s) = \mathbf{r} \times m \mathbf{v}_{\phi} = s \cdot 2\Delta s 2\pi s \Sigma \cdot s\omega \quad (\mathbf{L} \perp \mathbf{v}_{\phi}) \quad . \quad (2.7)$$

Es wird wieder die Zeitableitung gebildet und entwickelt:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}(4\pi s \Delta s \Sigma s^2 \omega) &= -v_{s+\Delta s} 2\pi (s + \Delta s) \Sigma_{s+\Delta s} (s + \Delta s)^2 \omega_{s+\Delta s} \Delta s \\ &\quad + v_{s-\Delta s} 2\pi (s - \Delta s) \Sigma_{s-\Delta s} (s - \Delta s)^2 \omega_{s-\Delta s} + 2 \frac{\partial G(s)}{\partial s} \\ &= -2\Delta s \frac{\partial}{\partial s}(2\pi v_s s \Sigma s^2 \omega) + 2 \frac{\partial G(s)}{\partial s} \Delta s \quad . \end{aligned} \quad (2.8)$$

Man erhält:

$$\frac{\partial}{\partial t}(s \Sigma s^2 \omega) + \frac{\partial}{\partial s}(v_s s \Sigma s^2 \omega) = \frac{1}{2\pi} \frac{\partial G(s)}{\partial s} \quad . \quad (2.9)$$

Die Drehimpulserhaltung lautet im stationären Fall also:

$$\frac{\partial}{\partial s}(s \Sigma v_s s^2 \omega) = \frac{1}{2\pi} \frac{\partial G(s)}{\partial s} \quad . \quad (2.10)$$

Integration von (2.10) und Einsetzen von (2.6) ergibt:

$$\begin{aligned} s \Sigma v_s s^2 \omega &= \frac{G}{2\pi} + \frac{C}{2\pi} \\ -\nu \Sigma \omega' &= -\Sigma v_s \omega + \frac{C}{2\pi s^3} \end{aligned} \quad (2.11)$$

Die Integrationskonstante resultiert aus der Randbedingung, dass der innere Rand der Scheibe an die Oberfläche des akkretierenden Objektes stößt, und daher die Rotationsgeschwindigkeit

---

<sup>2</sup>Die in dieser Arbeit stets verwendete kinematische Viskosität  $\nu = \eta/\rho$  ist nicht mit der dynamischen Viskosität  $\eta$  zu verwechseln.

gleich der Keplerschen<sup>3</sup> an der Oberfläche ist, sowie dass die Ableitung von  $\omega$  verschwindet. Besteht das Zentralobjekt aus einem supermassiven Schwarzen Loch, treten nicht zu vernachlässigende relativistische Effekte auf. Eine gute Approximation, die glücklicherweise 4-dimensionales Rechnen erspart, ist die Pseudo-Newton-Näherung<sup>4</sup>

$$\omega_{\text{PN}} = \sqrt{\frac{GM_*}{s^3(1 - r_s/s)^2}} \quad , \quad (2.12)$$

mit dem Schwarzschildradius  $r_s$ . Hierbei wird als Scheibenrand der letzte stabile Orbit angesetzt, der bei  $s_* = 3$  Schwarzschildradien liegt. Folgende Randbedingungen:

$$\begin{aligned} (a) \quad \omega_* &= \frac{1}{1 - r_s/s_*} \sqrt{\frac{GM_*}{s_*^3}} \\ (b) \quad \omega'_* &= 0 \end{aligned} \quad (2.13)$$

liefern  $C$  unter Verwendung von (2.4)

$$C = 2\pi s_*^3 \Sigma v_s \omega_* = -\dot{M} s_*^2 \omega_* \quad (2.14)$$

Einsetzen in (2.11) führt auf:

$$\begin{aligned} -\nu \Sigma \omega' &= -\Sigma v_s \omega - \frac{\dot{M} s_*^2}{2\pi s^3} \omega_* \\ \nu \Sigma \omega' &= -\frac{\dot{M} \omega}{2\pi s} + \frac{\dot{M}}{2\pi} \frac{1}{1 - r_s/s_*} \sqrt{\frac{GM_*}{s_*^3}} \\ \nu \Sigma &= -\frac{\dot{M} \omega}{2\pi s \omega'} \left( 1 - \frac{s_*^2}{\omega s^2} \frac{1}{1 - r_s/s_*} \sqrt{\frac{GM_*}{s_*^3}} \right) \\ \nu \Sigma &= -\frac{\dot{M} \omega}{2\pi s \omega'} \underbrace{\left( 1 - \sqrt{\frac{s_*}{s}} \frac{1 - r_s/s}{1 - r_s/s_*} \right)}_{:=f} \quad . \end{aligned} \quad (2.15)$$

Für das  $\omega$  in der Klammer kann (2.12) eingesetzt werden, da die Scheibe so nah am Zentralkörper nicht selbstgravitierend ist und die Randbedingung  $f \propto 1/s$  schnell genug abfällt.

### 2.1.3 Hydrostatisches Gleichgewicht und Zustandsgleichung

Betrachtet man ein beliebiges Volumenelement mit Abstand  $z$  zur Zentralebene der Scheibe und Abstand  $s$  zum Zentralkörper (Stern, Schwarzes Loch,...), so existiert ein Gleichgewicht zwischen den anziehenden Gravitationskräften beider Objekte und entgegenwirkenden Druckkräften. Die Hydrostatische Gleichung, zunächst in vertikaler ( $z$ -) Richtung, lautet also

$$\frac{dP}{dz} = \rho g = \rho(g_{\text{central},z} + g_{\text{disk},z}) \quad (2.16)$$

<sup>3</sup>bzw. einer Pseudo-Keplerschen Geschwindigkeit dicht um Schwarze Löcher

<sup>4</sup>siehe Abschnitt 2.2

Der erste Summand ist die z-Komponente der Gravitationskraft des Zentralkörpers

$$g_{\text{central},z} = - \left( \frac{GM_* z}{s^3(1 - r_s/s)^2} \right) \quad (2.17)$$

Die Flächendichte ist die vertikal integrierte Dichte:

$$\Sigma_z = \int \rho dz \quad (2.18)$$

Ändert sich  $\Sigma_z$  über den Radius nur langsam, kann die z-Komponente der Schwerebeschleunigung der Scheibe näherungsweise durch die einer unendlich ausgedehnten Ebene bestimmt werden. Dazu wird die Poissongleichung in z-Richtung gelöst:

$$\begin{aligned} \Delta\Phi = 4\pi G\rho &\quad \rightarrow \quad \frac{d^2\Phi}{dz^2} = 4\pi G\rho \\ \vec{g} = -\nabla\Phi &\quad \rightarrow \quad g_z = -\frac{d\Phi}{dz} \\ -g_z(z) = \frac{d\Phi(z)}{dz} &= \int 4\pi\rho dz = 2\pi G\Sigma_z \quad . \end{aligned} \quad (2.19)$$

Es ist also

$$g_{\text{disk},z} = -2\pi G\Sigma_z \quad . \quad (2.20)$$

(siehe auch Paczyński [1978]). Zusammen ergibt sich:

$$\frac{dP}{dz} = -\rho \left( \frac{GMz}{s^3(1 - r_s/s)^2} + 2\pi G\Sigma_z \right) \quad (2.21)$$

$$\frac{d\Sigma_z}{dz} = 2\rho \quad . \quad (2.22)$$

Um etwas mehr über die Struktur der Akkretionsscheibe zu erfahren, setzt man im Rahmen der 1-Zonen-Näherung für die Ableitung

$$\frac{dP}{dz} \sim \frac{P(h) - P(0)}{h - 0} = -\frac{P_c}{h} \quad , \quad (2.23)$$

ohne die Pseudo-Newton-Näherung, die nur in unmittelbarer Umgebung eines Schwarzen Lochs eine Rolle spielt. Mit  $P_c = \rho_c c_s^2$  (Strahlungsdruck vernachlässigt), der Schallgeschwindigkeit  $c_s$  und  $\Sigma_z \sim \rho_c h$  findet man:

$$\begin{aligned} \frac{c_s^2}{h} &= \frac{GM_* h}{s^3} + 2\pi G\rho_c h = (\omega^2 + 2\pi G\rho_c)h \\ \left(\frac{c_s}{h}\right)^2 &= \left(\frac{v_\phi}{s}\right)^2 + 2\pi G\rho_c \end{aligned} \quad (2.24)$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{c_s}{v_\phi}\right)^2 &= \left(\frac{h}{s}\right)^2 + 2\pi G\rho_c \left(\frac{h}{v_\phi}\right)^2 \\ \left(\frac{c_s}{v_\phi}\right)^2 &= \left(\frac{h}{s}\right)^2 \left(1 + \frac{2\pi G\rho_c}{\omega^2}\right) \quad . \end{aligned} \quad (2.25)$$

Das bedeutet, dass in einer dünnen Scheibe die keplersche Umlaufgeschwindigkeit weit über der Schallgeschwindigkeit liegt. Umgekehrt ist zu beachten, dass die Näherung einer dünnen Scheibe zusammenbricht, sollte das Material in bestimmten Regionen nahe oder unter der Schallgeschwindigkeit um das Zentralobjekt rotieren. Die Scheibenmasse müsste die Masse des Zentralkörpers bei weitem dominieren, um diese Näherung zu kippen. Daher wird zunächst weiter so verfahren, das Scheibenmodell ist jedoch später auf Inkonsistenzen zu prüfen. (2.25) führt auf ein Kriterium, wann die Scheibenmasse vergleichbare Wirkung entfaltet, wie die Zentralmasse  $M_* = (4/3)\pi s^3 \rho$ .

$$\begin{aligned} \frac{2\pi G \rho_c}{GM_* s^{-3}} &\geq 1 \\ \frac{\rho_c}{\rho} &\geq \frac{2}{3} \end{aligned} \quad (2.26)$$

Die radiale Struktur bestimmt sich aus der radialen Euler-Gleichung

$$v_s \frac{\partial v_s}{\partial s} - \frac{v_\phi^2}{s} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial s} - g = 0 \quad . \quad (2.27)$$

Bei Vergleich des Druckgradienten mit der Gravitationsbeschleunigung, die hier der Einfachheit halber keplersch angenommen sei:

$$\left| \frac{\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial s}}{g} \right| \sim \frac{\frac{1}{\rho} \frac{\rho c_s^2}{s} s^2}{GM_*} = \frac{c_s^2}{\omega^2 s^2} = \frac{c_s^2}{v_\phi^2} \propto \frac{h^2}{s^2} \quad , \quad (2.28)$$

ist dieser für dünne Scheiben ( $h \ll s$ ) verschwindend. Zur Einordnung des  $v_s(\partial v_s/\partial s)$  Terms in (2.27) dienen Gleichungen (2.4) und (2.15).

$$v_s = -\frac{4\pi\nu\Sigma g}{3f2\pi s\Sigma} \propto \frac{\nu}{s} \quad (2.29)$$

Wird die Viskosität nach dem  $\alpha$ -Ansatz parametrisiert, ist der Term vernachlässigbar, nach dem  $\beta$ -Ansatz jedoch nicht unbedingt!

$$\begin{aligned} \nu_\alpha = \alpha c_s h &\quad \rightarrow v_s \propto \alpha c_s \frac{h}{s} \ll c_s \\ \nu_\beta = \beta \omega s^2 &\quad \rightarrow v_s \propto \beta v_\phi \gg c_s \quad (\beta \sim \alpha) \end{aligned} \quad (2.30)$$

Natürlich lässt sich die Turbulenzgeschwindigkeit im  $\beta$ -Ansatz durch Parameterwahl beliebig weit drücken. Für ähnliche Parameter  $\alpha$  und  $\beta$  zeigt sich ein wesentlicher Unterschied zwischen beiden Ansätzen. Der  $\beta$ -Ansatz beschreibt einen Mechanismus, nach dem Materie wesentlich effektiver akkretiert wird.

Der Druck steht in Beziehung zu weiteren Zustandsgrößen, der Dichte  $\rho$  und der Temperatur  $T$ , wodurch der Zustand des Systems thermodynamisch vollständig beschrieben ist. Dieser Zusammenhang ist durch die Zustandsgleichung gegeben. Für ideale Gase gilt:

$$P_g = \frac{\rho k_B T_c}{\mu m_H} \quad . \quad (2.31)$$

$k_B$  ist die Boltzmann-Konstante und  $T_c$  die Temperatur in der Zentralebene der Scheibe. Gleichung (2.31) wird man anwenden dürfen, sofern die Wechselwirkung benachbarter Teilchen hinreichend klein ist gegenüber ihrer thermischen (kinetischen) Energie. In sehr heißen Gebieten muss neben dem Gasdruck  $P_g$  auch der Strahlungsdruck  $P_r$  berücksichtigt werden.

$$P_r = \frac{4\sigma T_c^4}{3c} \quad (2.32)$$

$\sigma$  ist die Stefan-Boltzmann-Konstante. Inwieweit der Strahlungsdruck gegenüber dem Gasdruck eine Rolle spielt, muss je nach Fall abgeschätzt werden. Der Gesamtdruck ist also:

$$P = P_g + P_r = \frac{\rho k_B T_c}{\mu m_H} + \frac{4\sigma T_c^4}{3c} \quad (2.33)$$

## 2.1.4 Energieerhaltung

Die allgemeine Energiebilanzgleichung lautet

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[ \rho(\epsilon_{\text{kin}} + \epsilon_{\text{in}}) \right] + \vec{\nabla} \cdot \left[ (\rho\epsilon_{\text{in}} + \rho\epsilon_{\text{kin}} + P)\vec{v} \right] = \vec{f}\vec{v} - \vec{\nabla}\vec{F} - \vec{\nabla}\vec{q} \quad (2.34)$$

mit der kinetischen und der inneren Energiedichte  $\epsilon_{\text{kin}}$ ,  $\epsilon_{\text{in}}$ , der Kraftdichte  $\vec{f}$  inklusive Gravitation und Restkräften (z.B. Viskosität).  $\vec{q}$  ist die Wärmeleitung, die bei hinreichend kleinen Temperaturgradienten außer Acht gelassen werden kann.  $\vec{F} = \vec{F}_{\text{rad}} + \vec{F}_{\text{conv}}$  gibt den Transport durch Strahlung und Konvektion an. Die kinetische Energie ist, sofern die Driftgeschwindigkeit klein ist, im Wesentlichen durch die Azimuthalgeschwindigkeit bestimmt

$$\epsilon_{\text{kin}} = \frac{\vec{v}^2}{2} \sim \frac{v_\phi^2}{2} \quad (2.35)$$

Die innere Energie ist für ein 1-atomiges ideales Gas

$$\epsilon_{\text{in}} = \frac{3}{2} \frac{\mathcal{R}T}{\mu m_H} = \frac{3}{2} \frac{P}{\rho} = \frac{3}{2} c_s^2 \quad (2.36)$$

Wie aus dem vorherigen Abschnitt ersichtlich, ist  $v_\phi \gg c_s$  und die innere Energie zusammen mit dem Druck gegenüber der kinetischen Energie vernachlässigbar.

$$\frac{\epsilon_{\text{kin}}}{\epsilon_{\text{in}} + P/\rho} = \frac{\frac{v_\phi^2}{2}}{\frac{3}{2}c_s^2 + c_s^2} = \frac{1}{5} \left( \frac{v_\phi}{c_s} \right)^2 \gg 1 \quad (2.37)$$

Im stationären Fall  $\frac{\partial}{\partial t} = 0$  gilt

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \left( \frac{1}{2} \rho v^2 \vec{v} \right) &= \vec{f}\vec{v} - \nabla\vec{F} \\ \frac{v^2}{2} \nabla(\rho\vec{v}) + \frac{\rho\vec{v}}{2} \nabla v^2 &= \vec{f}\vec{v} - \nabla\vec{F} \end{aligned} \quad (2.38)$$

Beide Summanden der linken Seite sind Null, da nach der Kontinuitätsgln.  $\nabla(\rho\vec{v}) = 0$  und  $\vec{v} \perp \nabla v^2$ . So erhält man

$$\vec{f}\vec{v} = \nabla\vec{F} \quad (2.39)$$

Zu beachten ist, dass dies für  $v_\phi \gg c_s$  gilt, also für nicht zu hohe Temperaturen, die jedoch unmittelbar vor dem Schwarzen Loch auftreten können.

Aus der Hydrodynamik weiß man, dass kinematische Viskosität in der Scheibe Dissipation erzeugt. Die Dissipationsrate pro Flächenelement und Zeiteinheit wird oft auch mit  $Q^+$  bezeichnet, da die Scheibe durch die viskose Reibung aufgeheizt wird. Insgesamt wird

$$D(s) = \frac{1}{2}\nu\Sigma(s\omega')^2 = \int_0^h Q^+ dz \quad (2.40)$$

in der Scheibe produziert. Befindet sich die Scheibe (lokal) im thermodynamischen Gleichgewicht, so steht  $Q^+$  im Gleichgewicht mit der Abstrahlung  $dF_{\text{rad}}/dz$  bzw.  $Q^-$ , welche die Scheibe abkühlt.

$$\begin{aligned} Q^+ &= Q^- = \frac{dF_{\text{rad}}}{dz} \\ F_{\text{rad}} &= \int_0^\infty F_{\text{rad}}^\nu d\nu \end{aligned} \quad (2.41)$$

$F_{\text{rad}}$  ist das Integral der Strahlungsbeiträge über alle Frequenzen  $\nu$  (nicht zu verwechseln mit der Viskosität  $\nu$ !), wobei  $F_{\text{rad}}^\nu$  wiederum alle Energieflüsse pro spektraler Bandbreite und Raumwinkel einsammelt

$$F_{\text{rad}}^\nu = \frac{1}{\pi} \int_{\vartheta=0}^\pi \int_{\phi=0}^{2\pi} I_\nu(\vartheta, \phi) \cos \vartheta \sin \vartheta d\vartheta d\phi \quad (2.42)$$

Der Nettoenergiefluss ist die Differenz aus Emission und Absorption, die durch die Materialgrößen Opazität  $\kappa_\nu$  und Emissivität  $\epsilon_\nu$  (beide frequenzabhängig) bestimmt sind.

$$\begin{aligned} dI_\nu &= \epsilon_\nu dx - I_\nu \rho \kappa_\nu dx \\ \frac{dI_\nu}{dx} &= \epsilon_\nu - I_\nu \rho \kappa_\nu \end{aligned} \quad (2.43)$$

Mit der Abkürzung  $B_\nu(T) = \frac{\epsilon_\nu}{\kappa_\nu \rho}$  und Einführung der optischen Dicke  $d\tau_\nu = \rho \kappa_\nu dx$ , erhält man

$$\begin{aligned} \frac{1}{\rho} \frac{dI_\nu}{dx} &= (B_\nu - I_\nu) \kappa_\nu \\ \frac{dI_\nu}{d\tau_\nu} &= (B_\nu - I_\nu) \end{aligned} \quad (2.44)$$

$\tau_\nu = 1$  entspricht einer mittleren freien Weglänge  $l_{\text{ph}} = \frac{1}{\rho \kappa_\nu}$  eines Photons in der Scheibe zwischen Emission und Absorption. Für den Strahlungstransport muss man zwei Fälle unterscheiden, die von der optischen Dicke abhängen.

$$\tau_\nu = \int \rho \kappa_\nu dx = \frac{x}{l_{\text{ph}}} \quad (2.45)$$

Ist das Material optisch dünn ( $\tau_\nu \ll 1$ ), ist die charakteristische Länge  $x$ , d.h. die Strecke, über die Strahlung transportiert wird, wesentlich kleiner als die mittlere freie Weglänge der Photonen ( $x \gg l_{\text{ph}}$ ). Sie wechselwirken also praktisch nicht, bis sie das System verlassen. Ist das Material jedoch optisch dick ( $\tau_\nu \gg 1$ ), wird Strahlung effektiv nur sehr langsam nach

außen transportiert. Dies ist insbesondere bei Sternen der Fall, bei denen ein im Inneren erzeugtes Photon im Schnitt  $10^6$  Jahre bis zur Oberfläche benötigt. Dies ist insbesondere darum wichtig, da das lokal erzeugte Spektrum so nahezu einer Schwarzkörperstrahlung entspricht. Dafür verwendet man die Diffusionsnäherung. Der diffusive Fluss ist allgemein:

$$\vec{j} = -D\vec{\nabla}n \quad (2.46)$$

Die Diffusionskonstante  $D$  ist für ein Photonengas

$$D = \frac{1}{3}cl_{\text{ph}} = \frac{c}{3\rho\kappa_\nu} \quad (2.47)$$

$n$  ist die Konzentrationsdichte, hier also die Strahlungsdichte

$$n = u_\nu = \frac{4\pi}{c}B_\nu \quad (2.48)$$

Somit erhält man durch sukzessives Einsetzen und  $\vec{\nabla}B_\nu = \frac{\partial B_\nu}{\partial T}\vec{\nabla}T$

$$\begin{aligned} \vec{F}_{\text{rad}}^\nu &= \vec{j} = -\frac{c}{3\rho\kappa_\nu}\vec{\nabla}\left(\frac{4\pi}{c}B_\nu\right) = -\frac{4\pi}{3\rho\kappa_\nu}\vec{\nabla}B_\nu \\ &= -\left(\frac{1}{\kappa_\nu}\frac{\partial B_\nu}{\partial T}\right)\frac{4\pi}{3\rho}\vec{\nabla}T \\ F_{\text{rad}} &= \int_0^\infty \vec{F}_{\text{rad}}^\nu = -\frac{4\pi}{3\rho}\vec{\nabla}T \int_0^\infty \frac{1}{\kappa_\nu}\frac{\partial B_\nu}{\partial T}d\nu \end{aligned} \quad (2.49)$$

Mit dem Stefan-Boltzmann-Gesetz  $\pi B(T) = \sigma T^4$  folgt

$$F_{\text{rad}} = -\frac{4\pi}{3\rho}\vec{\nabla}T \frac{1}{\kappa} \frac{4\sigma T^3}{\pi} = -\frac{16\sigma T^3}{3\kappa\rho}\vec{\nabla}T = -\frac{4\sigma}{3\kappa\rho}\vec{\nabla}T^4 \quad (2.50)$$

Unter Berücksichtigung der Scheibenstruktur ( $\frac{\partial T}{\partial \phi} = 0$  aus Symmetrie;  $|\frac{\partial T}{\partial s}| \ll |\frac{\partial T}{\partial z}|$  wegen  $h \ll s$ ) ergibt sich

$$\begin{aligned} \vec{\nabla}T &\rightarrow \frac{\partial T}{\partial z}\hat{z} \\ \vec{F}_{\text{rad}} &= F_{\text{rad}}\hat{z} \\ F_{\text{rad}} &= -\frac{16\sigma T^3}{3\kappa\rho}\frac{dT}{dz} \end{aligned} \quad (2.51)$$

oder durch Umstellen der Gleichung der Energietransport (durch Strahlung)

$$\frac{dT}{dz} = -\frac{3\kappa\rho}{16\sigma T^3}F_{\text{rad}} \quad (2.52)$$

Die Opazität wurde hier implizit über alle Frequenzen integriert und die Rosseland-Näherung für eine mittlere Opazität verwendet. Sie ist definiert durch

$$\frac{1}{\kappa_R} = \int \frac{1}{\kappa_\nu}\frac{\partial B_\nu}{\partial T}d\nu \Big/ \int \frac{\partial B_\nu}{\partial T}d\nu \quad (2.53)$$

Verwendet man nun die Gleichungen (2.40) und (2.41) und setzt  $dT(z)/dz \sim T(z)/h$ , erhält man mit  $\Sigma = 2\rho h$ :

$$D(s) = \int_0^h Q^+ = F(h) - F(0) = -\frac{4\sigma}{3\tau}(T^4(h) - T^4(0)) \quad (2.54)$$

Liegt die Zentraltemperatur wesentlich höher als die Oberflächentemperatur, kommt man schließlich zu folgender Energiegleichung in der 1-Zonen-Näherung

$$D(s) = \frac{4\sigma}{3\tau}T_c^4 \quad (2.55)$$

Wird die durch Reibung freigesetzte Energie durch Strahlung abtransportiert, ergibt sich aus (2.40) und (2.55) folgende Energiegleichung:

$$\frac{1}{2}\nu\Sigma(s\omega')^2 = \frac{4\sigma}{3\tau}T_c^4 \quad (2.56)$$

### 2.1.5 Konvektion, Advektion

Neben viskoser Heizung und Wärmestrahlung können Konvektion und Advektion auftreten. Konvektion bedeutet Energieaustausch zwischen heißen und kalten Schichten durch Austausch makroskopischer Massenelemente (engl. “blobs”, “bubbles”, convective elements), die in instabilen Regionen entstehen. Das sich bewegende Element löst sich schließlich im umgebenden Material auf und gibt Energie ab, bzw, nimmt sie auf. Konvektion wird auch als Ursprung turbulenter Viskosität gesehen. Den konvektiven Fluss zu bestimmen ist ein großes Problem und wird meist über die Mischungswegtheorie von Prandtl angegangen.

In einer Standardscheibe wird die dissipierte Energie effektiv abgestrahlt, die Scheibe ist daher kühl und dünn. Es gibt jedoch auch die sogenannten ADAF- Scheiben (advection dominated accretion flow), in denen die thermische Energie nach innen geleitet wird (Advektion) und der Akkretionsfluss sehr heiss wird. Solche Scheiben sind deshalb auch nicht mehr dünn. Man nimmt an, dass es bei Scheiben um massereiche Schwarze Löcher einen Übergang gibt zwischen dünner, kühler Scheibe außen und ADAF-Scheibe nahe am Zentralobjekt. Folgende Abschätzung soll zeigen, wann Advektion dominant werden kann. Die Advektionsrate ist definiert durch

$$Q_{\text{adv}} = \frac{\dot{M}}{2\pi s^2}c_s^2 \quad (2.57)$$

Mit Gln. (2.40) und (2.4) lautet das Verhältnis aus viskoser Dissipation und advektivem Abtransport:

$$\frac{Q_{\text{adv}}}{Q_{\text{vis}}} = \frac{-2\pi s v_s \Sigma c_s^2}{2\pi s^2 \nu \Sigma (9/4)\omega^2} \propto \frac{c_s^2 v_s s}{\nu v_\phi^2} \quad (2.58)$$

Mit den beiden Parametrisierungen der Viskosität  $\nu$  und  $v_s \sim \frac{\nu}{s}$  (aus (2.4) in (2.15)) ergibt sich

$$\frac{Q_{\text{adv}}}{Q_{\text{vis}}} \propto \begin{cases} \left(\frac{c_s}{v_\phi}\right)^2 \frac{v_s s}{c_s h} \frac{1}{\alpha} \sim \left(\frac{h}{s}\right)^2 \ll 1 \\ \left(\frac{c_s}{v_\phi}\right)^2 \frac{v_s}{v_\phi} \frac{1}{\beta} \sim \left(\frac{c_s}{v_\phi}\right)^2 \ll 1 \end{cases}$$



Analog liefert das Verhältnis mit der Abstrahlung (2.41):

$$\frac{Q_{\text{adv}}}{Q_{\text{rad}}} = \frac{-2\pi s v_s \Sigma c_s^2 3\tau \frac{T_{\text{eff}}^4}{T_c^4}}{2\pi s^2 4\sigma T_c^4 \frac{T_{\text{eff}}^4}{T_c^4}} \propto \frac{v_s \Sigma P_g 2h 3\tau \left(\frac{T_{\text{eff}}}{T_c}\right)^4}{\Sigma s 3c P_r} = \underbrace{\frac{v_s}{c} \frac{h}{s} \left(\frac{T_{\text{eff}}}{T_c}\right)^4}_{\ll 1} 2\tau \frac{P_g}{P_r} \quad (2.59)$$

Ob die Advektion also in der Beziehung  $F_{\text{vis}} = F_{\text{rad}} + F_{\text{adv}}$  vernachlässigbar ist, hängt vom Verhältnis von Gas- zu Strahlungsdruck und von der optischen Dicke ab. Natürlich begünstigt eine große optische Dicke die Advektion, da die Energie nur langsam nach außen abgeführt werden kann. Der Strahlungsdruck dürfte jedoch, wenn überhaupt, in unmittelbarer Nähe des Schwarzschildradius dominant werden.

## 2.2 Gravitation (Poissongleichung)

Betrachtet wird eine Akkretionsscheibe um ein massereiches Schwarzes Loch. Abgesehen davon, dass durch Reibungskräfte Material aus der Scheibe in Richtung Zentralobjekt wandert, befinden sich in jedem Element der Scheibe Zentrifugal- und Gravitationskraft im Gleichgewicht, was zu einer Keplerbahn um den Zentralkörper führt. Die Winkelgeschwindigkeit ist bekannt:

$$\omega_K = \sqrt{\frac{GM_*}{s^3}} \quad (2.60)$$

Durch die enorme Masse des Schwarzen Lochs treten nahe des Schwarzschildradius relativistische Effekte auf, so dass die keplersche Bewegung nicht mehr gegeben ist. Wenn man nicht vierdimensional rechnen möchte, ist, wie bereits in Abschnitt (2.1.2) angedeutet, eine Pseudo-Newton-Näherung des Gravitationspotentials nützlich, wie beispielsweise die von Paczyński and Wiita [1980]:

$$\Phi = -\frac{GM_*}{s - r_s} \quad (2.61)$$

mit dem Schwarzschildradius

$$r_s = \frac{2GM_*}{c^2} \quad (2.62)$$

Der letzte stabile Orbit liegt bei 3 Schwarzschildradien und definiert die innere Grenze der Scheibe. Die Winkelgeschwindigkeit bestimmt sich so zu

$$\begin{aligned} \frac{v_\phi^2}{s} + g_s &= 0 \\ \omega^2 &= -g/s \\ \omega &= \sqrt{\frac{GM_*}{s^3(1 - r_s/s)^2}} \end{aligned} \quad (2.63)$$

Natürlich erzeugt die Scheibe selbst auch ein Gravitationsfeld. Ist die Akkretionsscheibe massereich genug, kann ihre Gravitationswirkung die des Zentralkörpers sogar übertreffen. Solche Scheiben nennt man selbstgravitierend. Um das genaue Potential der Scheibe zu bestimmen, muss die Poissongleichung gelöst werden, dabei im großen und ganzen über Dichte und Volumen integriert werden.

Eine erste, akzeptable Näherung ist ein Keplerpotential, das lokal die innerhalb der Bahn eingeschlossene Masse  $M_d$  in Betracht zieht:

$$M_d = \int_0^{2\pi} \int_0^s \Sigma(s) s ds d\phi \quad (2.64)$$

Daraus erhält man insgesamt für die Winkelgeschwindigkeit

$$\omega^2 = \frac{1}{(1 - r_s/s)^2} \frac{G(M_* + M_d)}{s^3} \quad (2.65)$$

Dies ist allerdings nur eine erste Näherung, in welche die höheren Momente der Materieverteilung nicht eingehen. So hängt sie auch von der äußeren Randbedingung der Scheibe ab, was zu Problemen führen kann.

Als Kriterium für radiale Selbstgravitation wird die vom Radius eingeschlossene Scheibenmasse mit der Zentralmasse verglichen (siehe 2.26):

$$\frac{M_d}{M_*} \geq \frac{2}{3} \quad (2.66)$$

Die Akkretionsscheibe wird vertikal oder keplersch selbstgravitierend, sobald der zweite Term in Gleichung (3.2) gegenüber dem ersten ( $\omega_K^2$  hier noch keplersch) dominiert:

$$\frac{4\pi\rho s^3}{M_*} \geq 1 \quad \text{bzw.} \quad \frac{\pi\Sigma s^2}{M_*} \geq \frac{1}{2} \frac{h}{s}, \quad (2.67)$$

wobei  $\pi\Sigma s^2 \simeq M_d$ . Da  $M_d(s)$  monoton wachsend ist, lassen sich drei aufeinanderfolgende Bereiche definieren:

**NSG:** nicht selbstgravitierende Scheiben mit  $M_d(s) < (1/2)(h/s)M_*$  (klassische Shakura-Sunyaev-Scheiben)

**KSG:** vertikal selbstgravitierende Scheiben mit  $(1/2)(h/s)M_* \leq M_d(s) < M_*$  und keplerscher Rotation

**FSG:** voll selbstgravitierende Scheiben mit  $M_d(s) \geq M_*$

Dies gilt jedoch nur für dünne Scheiben ( $h/s \ll 1$ ).

## 2.3 Viskosität

Wie bereits erwähnt, gilt die Viskosität als treibende Kraft für den Transport von Drehimpuls und Masse. Ihr Ursprung ist jedoch noch unbekannt. Wie in 2.4.1 geschildert, muss die Viskosität turbulent sein, damit Materie effektiv, d.h. in vernünftigen Zeiten akkretiert werden kann. Zudem weisen Akkretionsscheiben mit molekularer Viskosität hohe Reynoldszahlen auf, was auf turbulente Strömungen hinweist. Aufgrund großer Schwierigkeiten bei der Behandlung der Navier-Stokes-Gleichungen, werden i.A. empirische Beschreibungen der Viskosität verwendet. Für Standardakkretionsscheiben (protoplanetare oder Doppelsternsysteme) wurde bereits Anfang der 70er Jahre von Shakura and Sunyaev [1973] eine Viskositätsparametrisierung vorgeschlagen, die sich in der Beschreibung nichtselbstgravitierender

Scheiben als außerordentlich erfolgreich erwiesen hat, insbesondere der Spektren, Lichtkurven und Zeitskalen Kataklysmischer Veränderlicher. Diese  $\alpha$ -Viskosität macht keine Aussagen über die Physik von Turbulenzen, schränkt aber ihre Effektivität ein. Die molekulare Viskosität wird durch eine isotrope turbulente Viskosität

$$\nu = \Delta s \Delta v \quad (2.68)$$

ersetzt mit einer charakteristischen Ausdehnung  $\Delta s$  einer Turbulenz, welche sich mit einer charakteristischen Geschwindigkeit  $\Delta v$  fortbewegt. Mit den Argumenten, dass die Größe der Turbulenz die Ausdehnung der Scheibe nicht überschreiten könne, also  $\Delta s < 2h$ , und ihre Geschwindigkeit unterhalb der Schallgeschwindigkeit liegen müsse, folgt dieser Ansatz:

$$\nu_\alpha = \alpha h c_s \quad (2.69)$$

$\alpha$  ist ein freier Parameter, in dem alle Unbekannten stecken und welcher kleiner als 1 sein muss. Übliche Werte für  $\alpha$  liegen bei  $10^{-2} \dots 1$ . Es wird angenommen, dass dieser Parameter über die Scheibe nur gering variiert und konstant genommen werden kann. Warum die  $\alpha$ -Viskosität im Falle selbstgravitierender Scheiben versagt, soll in Kapitel 4 geklärt werden.

Eine alternative Parametrisierung für vor allem selbstgravitierende Scheiben ist die sogenannte  $\beta$ -Viskosität, vorgeschlagen von Duschl et al. [2000]. Auch sie beschreibt die Viskosität empirisch nach (2.68), verwendet allerdings andere charakteristische Größen. Die Viskosität kann Turbulenzen erzeugen, die nicht isotrop sind. Da sich die Wirbel in der Scheibe bewegen wäre eine letzte Obergrenze für die Ausdehnung der Scheibenradius anstelle der -dicke. Schließlich werden Materie und Drehimpuls hauptsächlich radial transportiert. Eine Geschwindigkeitsskala, die sich anbietet, ist die Azimuthalgeschwindigkeit, schließlich die Geschwindigkeit des umgebenden Materials. So ergibt sich eine funktional völlig andere Beschreibung der Form:

$$\nu_\beta = \beta s v_\phi = \beta \omega s^2 \quad (2.70)$$

Der Parameter  $\beta$  wird gerne mit dem Reziproken der kritischen Reynoldszahl identifiziert. Übliche Werte liegen bei  $10^{-3} \dots 10^{-5}$ . Wie bereits oben erwähnt, sollte die Turbulenzgeschwindigkeit nicht die Schallgeschwindigkeit überschreiten, da sonst Dissipationsschocks auftreten bis die Geschwindigkeit wieder subsonisch wird. Daher wird die Viskosität dahingehend modifiziert, ähnlich der Arbeit von Biermann [2001]. Wieder ausgehend von Gleichung (2.68) wird als charakteristische Längenskala der Turbulenz der Radius  $s$  angenommen und die Turbulenzgeschwindigkeit durch die Schallgeschwindigkeit begrenzt:

$$\Delta v_\phi = \Delta \omega s = \delta c_s \quad (2.71)$$

mit  $\delta < 1$ . Es ist

$$\frac{d\omega}{ds} = \frac{\omega}{s} \bar{\omega}' \quad (2.72)$$

$$\left| \frac{d\omega}{ds} \right| \simeq \frac{\Delta \omega}{\Delta s} \quad (2.73)$$

Also

$$\Delta s = \Delta \omega \frac{s}{\omega} \frac{1}{|\bar{\omega}'|} \quad (2.74)$$

$$\nu_\delta = \delta \frac{c_s}{\omega} \frac{1}{|\bar{\omega}'|} \frac{\delta c_s}{s} s = \delta^2 \frac{c_s^2}{\omega} \frac{1}{|\bar{\omega}'|} \quad (2.75)$$

Wünschenswert wäre ein Anschluß an die  $\alpha$ -Parametrisierung, die im inneren, nichtselbstgravitierenden Bereich die Viskosität gut beschreibt. Unter Verwendung von (2.25) mit  $2\pi G\rho c \ll \omega_K^2$  und keplerscher Winkelgeschwindigkeit ergibt sich:

$$\nu_\delta = \delta^2 \frac{c_s}{v_\phi} \frac{sc_s}{|\bar{\omega}'_K|} = \frac{2}{3} \delta^2 hc_s \stackrel{!}{=} \alpha hc_s = \nu_\alpha \quad (2.76)$$

Insgesamt lautet die Parametrisierung also

$$\nu_\delta = \frac{3}{2} \alpha \frac{c_s^2}{|\bar{\omega}'|} \quad (2.77)$$

Im hier gerechneten Scheibenmodell wird von der  $\beta$ -Viskosität ausgegangen und auf die stoßdissipationsbegrenzte Viskosität umgeschaltet, sobald nach (2.71) die  $\beta$ -Turbulenzgeschwindigkeit die der  $\delta$ -Viskosität übertrifft:

$$\sqrt{\beta} v_\phi > \sqrt{3\alpha/2} c_s \quad . \quad (2.78)$$

## 2.4 Zeitskalen und Stabilität

### 2.4.1 Zeitskalen

Das (beobachtbare) zeitliche Verhalten von Akkretionsscheiben gibt Aufschluss über die Viskosität, die als Triebfeder hinter dem Akkretionsfluss gilt. Sind Druck- und Gravitationskräfte in Gleichung (2.16) nicht im Gleichgewicht, ergibt sich eine Nettobeschleunigung von

$$\begin{aligned} a &= -\frac{1}{\rho} \frac{dP}{dz} + g_z \\ a &= \frac{z}{\tau^2} \end{aligned} \quad (2.79)$$

Um festzustellen, auf welchen Zeitskalen  $\tau$  signifikante Änderungen in der Scheibe ablaufen, bedient man sich eines Gedankenexperiments und schaltet den Druck aus. Es kommt zum Kollaps und es gilt:

$$\begin{aligned} \frac{z}{\tau_{\text{dyn}}^2} &= g_z = \omega^2 z \\ \tau_{\text{dyn}} &= \frac{1}{\omega} = \frac{s}{v_\phi} \end{aligned} \quad (2.80)$$

$\tau_{\text{dyn}}$  heisst dynamische Zeitskala und entspricht der Umlaufzeit eines Volumenelements der Scheibe um den Zentralkörper. Wird nun anstelle des Drucks die Gravitation ausgeschaltet, führt dies zu Expansion und man erhält näherungsweise

$$\begin{aligned} \frac{z}{\tau_{\text{hyd}}^2} &= -\frac{1}{\rho} \frac{dP}{dz} \sim -\frac{1}{\rho} \frac{P(h) - P(0)}{h} = \frac{c_s^2}{h} \\ z &\sim h \\ \tau_{\text{hyd}} &\sim \frac{h}{c_s} \end{aligned} \quad (2.81)$$

$\tau_{\text{hyd}}$  heisst hydrostatische Zeitskala und ist ein Maß dafür, wie schnell sich im gestörten System das Hydrostatische Gleichgewicht wieder einstellt. Nun fehlt noch die viskose Zeitskala  $\tau_{\text{vis}}$ , die angibt, wie schnell sich bedingt durch Viskosität die Dichte in der Scheibe ändert. Sie sollte im Vergleich zur hydrostatischen Skala groß sein, da sonst Gleichung (2.16) nicht erfüllt ist. Vereinfacht wird dazu die zeitabhängige Gleichung der Drehimpulserhaltung (2.9) mit der Kontinuitätsgleichung (2.3)

$$\begin{aligned} \frac{G'(s)}{2\pi} &= s^2 \omega s \frac{\partial \Sigma}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial s} (s v_s \Sigma) s^2 \omega + s v_s \Sigma \frac{\partial}{\partial s} (s^2 \omega) \\ &= s v_s \Sigma (s^2 \omega)' \end{aligned} \quad (2.82)$$

unter der Annahme, dass  $\partial \omega / \partial t = 0$ . Das Ergebnis setzt man in (2.3) ein und (2.6) für  $G(s)$ , um  $v_s$  zu eliminieren. Für keplersche Winkelgeschwindigkeit ergibt sich

$$\begin{aligned} s \frac{\partial \Sigma}{\partial t} &= -\frac{\partial}{\partial s} \left[ \frac{1}{2\pi (s^2 \omega)'} \frac{\partial}{\partial s} (-2\pi s \Sigma \nu s^2 \omega') \right] \\ \frac{\partial \Sigma}{\partial t} &= \frac{3}{s} \frac{\partial}{\partial s} \left[ \sqrt{s} \frac{\partial}{\partial s} (\nu \Sigma \sqrt{s}) \right] \end{aligned} \quad (2.83)$$

Um näherungsweise die Skala herauszufinden, setzt man

$$\frac{\partial \Sigma}{\partial t} \rightarrow \frac{\Sigma}{\tau_{\text{vis}}} \quad ; \quad \frac{\partial}{\partial s} \rightarrow \frac{1}{s} \quad (2.84)$$

und erhält den Zusammenhang

$$\begin{aligned} \frac{\Sigma}{\tau_{\text{vis}}} &\sim -\frac{3}{s} \frac{1}{s} \sqrt{s} \frac{1}{s} \Sigma \nu \sqrt{s} \\ \tau_{\text{vis}} &\sim \frac{s^2}{\nu} \end{aligned} \quad (2.85)$$

Die thermische Zeitskala schließlich gibt an, wann sich thermisches Gleichgewicht einstellt, das beispielsweise durch eine geänderte Dissipationsrate gestört wurde. Sie wird definiert durch

$$\tau_{\text{th}} = \frac{\text{Wärmeinhalt pro Scheibenfläche}}{\text{Dissipationsrate pro Scheibenfläche}} \quad (2.86)$$

und ist für ein Gas

$$\tau_{\text{th}} = \frac{P_{\text{g}}}{D(s)} \simeq \frac{\Sigma c_{\text{s}}^2}{9 \frac{v_{\phi}^2}{8 \nu \Sigma} \frac{1}{s^2}} \sim \frac{c_{\text{s}}^2}{v_{\phi}^2} \tau_{\text{vis}} \quad (2.87)$$

Vergleichen man die vier Zeitskalen mit Hilfe von (2.25), der Definition der Machzahl  $\mathcal{M} = v_{\phi}/c_{\text{s}}$  und den beiden Parametrisierungen der Viskosität,

$$\begin{aligned} \tau_{\text{vis}}^{\alpha} &\sim \frac{s^2}{\alpha h c_{\text{s}}} = \alpha^{-1} \mathcal{M}^2 \left( 1 + \frac{2\pi G \rho_{\text{c}}}{\omega^2} \right) \tau_{\text{dyn}} \\ \tau_{\text{vis}}^{\beta} &\sim \frac{s^2}{\beta \omega s^2} = \beta^{-1} \tau_{\text{dyn}} \\ \tau_{\text{th}}^{\alpha} &\sim \mathcal{M}^{-2} \tau_{\text{vis}}^{\alpha} \sim \alpha^{-1} \left( 1 + \frac{2\pi G \rho_{\text{c}}}{\omega^2} \right) \tau_{\text{dyn}} \\ \tau_{\text{th}}^{\beta} &\sim \mathcal{M}^{-2} \tau_{\text{vis}}^{\beta} \sim \beta^{-1} \mathcal{M}^{-2} \tau_{\text{dyn}} \\ &= \beta^{-1} \left( \frac{h}{s} \right)^2 \left( 1 + \frac{2\pi G \rho_{\text{c}}}{\omega^2} \right)^3 \tau_{\text{hyd}} \\ \tau_{\text{hyd}} &\sim \left( 1 + \frac{2\pi G \rho_{\text{c}}}{\omega^2} \right)^{-1} \tau_{\text{dyn}} \end{aligned} \quad (2.88)$$

erhält man folgende Hierarchien:

$$\tau_{\text{hyd}} \leq \tau_{\text{dyn}} \leq \tau_{\text{th}}^{\alpha} < \tau_{\text{vis}}^{\alpha} \quad (2.89)$$

$$\tau_{\text{th}}^{\beta} (\text{NSG}) < \tau_{\text{hyd}} \leq \tau_{\text{dyn}} \leq \tau_{\text{th}}^{\beta} (\text{SG}) < \tau_{\text{vis}}^{\beta} \quad (2.90)$$

wobei üblicherweise  $0 < \alpha < 1$  ist und  $\beta$  bei ca.  $10^{-3}$  liegt. Nach Frank et al. [1992] liegen die dynamische und thermische Zeitskala für typische  $\alpha$ -Scheiben in der Ordnung von Minuten, die viskose Zeitskala bewegt sich zwischen Tagen und Wochen. Ist die Scheibe selbstgravitierend, nimmt die viskose Zeitskala ab. Bei  $\beta$ -Viskosität, hängt die thermische Zeitskala sehr von der Stärke der Selbstgravitation ab. Interessanterweise ist die thermische Zeitskala in nur schwach oder nicht selbstgravitierenden Scheiben (NSG) erheblich kürzer als die dynamische Skala.  $\beta$ -Viskosität scheint thermische Störungen sehr effizient ausgleichen zu können. Mit steigender Dichte vergrößert sich die Schallgeschwindigkeit.

## 2.4.2 Thermische Stabilität

Diese hierarchische Anordnung der Zeitskalen führen auf unterschiedliche Arten von Stabilität. Ist zum Beispiel das Energiegleichgewicht gestört, wird die Instabilität auf einer Zeitskala  $\tau_{\text{th}}$  wachsen, welche wesentlich kürzer ist, als die viskose Zeitskala, auf welcher signifikante Änderungen der Dichte  $\Sigma$  stattfinden. Für  $\alpha < 1$  ist  $\tau_{\text{th}} > \tau_{\text{hyd}}$  in (2.89) bzw. in (2.90) für NSG-Scheiben, so dass man  $\Sigma$  als konstant nehmen kann und sich schnell Hydrostatisches Gleichgewicht einstellt. Solche Instabilitäten entstehen, wenn die (lokale) Kühlrate nicht länger im Gleichgewicht mit der (lokalen) Heizrate steht. Dies ist jedoch nur der Auslöser. Die Frage nach der Stabilität beantwortet das weitere zeitliche Verhalten von  $Q^-$  und  $Q^+$ , d.h. ob beispielsweise bei einer Erhöhung der Temperatur  $T_c$  die Abstrahlung geringer zunimmt als die viskose Wärmeproduktion. Die übliche Art, ein Kriterium für thermische Instabilität anzugeben ist allgemein

$$\frac{dQ^-}{dT_c} < \frac{dQ^+}{dT_c} \quad \text{oder auch} \quad \frac{d \ln Q^-}{d \ln T_c} < \frac{d \ln Q^+}{d \ln T_c} \quad (2.91)$$

## 2.4.3 Viskose Stabilität

Um die Stabilität auf viskoser Zeitskala  $\tau_{\text{vis}}$  zu prüfen, muss die Scheibe zeitabhängig betrachtet werden. Die zeitabhängige Kontinuitätsgleichung (2.3) lässt sich mit (2.4) folgendermaßen umschreiben:

$$\begin{aligned} \frac{\partial(s\Sigma)}{\partial t} &= -\frac{\partial(sv_s\Sigma)}{\partial s} \\ s \frac{\partial\Sigma}{\partial t} &= \frac{1}{2\pi} \frac{\partial\dot{M}}{\partial s} \quad , \end{aligned} \quad (2.92)$$

unterstellt, dass sich der Radius der Scheibe nicht nennenswert ändert. Betrachtet man eine kleine Störung in der Dichte  $\Delta\Sigma$  um die stationäre Lösung  $\Sigma_0$  und schreibt  $\mu = \nu\Sigma$ , ergibt sich auch eine in erster Ordnung lineare Störung  $\Delta\mu$ :

$$\begin{aligned} \Sigma &= \Sigma_0 + \Delta\Sigma \\ \Delta\mu &= \nu(s, \Delta\Sigma)\Delta\Sigma = \frac{\partial\mu}{\partial\Sigma}\Delta\Sigma \end{aligned} \quad (2.93)$$

Einsetzen in die Diffusionsgleichung (2.83) liefert

$$\frac{\partial}{\partial t}(\Delta\Sigma) = \frac{3}{s} \frac{\partial}{\partial s} \left[ \sqrt{s} \frac{\partial}{\partial s} (\Delta\mu \sqrt{s}) \right] \quad (2.94)$$

und Elimination von  $\Delta\Sigma$  mit (2.93) bringt

$$\frac{\partial}{\partial t}(\Delta\mu) = \frac{\partial\mu}{\partial\Sigma} \frac{3}{s} \frac{\partial}{\partial s} \left[ \sqrt{s} \frac{\partial}{\partial s} (\Delta\mu \sqrt{s}) \right] \quad (2.95)$$

Natürlich folgt auch  $\Delta\mu$  einer Diffusionsgleichung, der Diffusionskoeffizient ist jedoch proportional zu  $\partial\mu/\partial\Sigma$  und kann positiv, wie auch negativ sein, da nichts über  $\nu$  und damit  $\mu$  bekannt ist. Ist  $\partial\mu/\partial\Sigma$  positiv, verschwindet die Störung auf viskoser Zeitskala. So lautet das viskose Stabilitätskriterium

$$\frac{\partial\mu}{\partial\Sigma} > 0 \quad , \quad (2.96)$$

dass sich mit (2.15) und (2.55) mit (2.40) wegen  $\mu = \nu\Sigma \propto \dot{M} \propto T_c^4$  auch alternativ schreiben lässt zu

$$\frac{\partial \dot{M}}{\partial \Sigma} > 0 \quad \text{oder} \quad \frac{\partial T_c}{\partial \Sigma} > 0 \quad . \quad (2.97)$$

Ist also beispielsweise lokal  $\frac{\partial \dot{M}}{\partial \Sigma} < 0$ , hätte eine Dichteabnahme einen Anstieg der Akkretionsrate zur Folge und umgekehrt. Die Scheibe würde in einzelne Ringe zerfallen.

#### 2.4.4 Gravitative Stabilität, Toomre Parameter

Toomre [1964] hat sich mit der gravitativen Stabilität einer Scheibe, bestehend aus Sternen, beschäftigt. In einer rotierenden, flachen, rotationssymmetrischen Scheibe folgt eine infinitesimale Störung diesen linearisierten Gleichungen

$$\begin{aligned} \frac{\partial u'}{\partial t} + \omega(s) \frac{\partial u'}{\partial \phi} - 2\omega(s)v &= \frac{\partial \Phi'}{\partial s} \\ \frac{\partial v'}{\partial t} + \omega(s) \frac{\partial v'}{\partial \phi} + u' \left[ \omega(s) + \frac{\partial}{\partial s} (s\omega(s)) \right] &= \frac{1}{s} \frac{\partial \Phi'}{\partial \phi} \\ \frac{\partial u'}{\partial t} + \omega(s) \frac{\partial u'}{\partial \phi} + \frac{1}{s} \frac{\partial}{\partial s} [s\Sigma'(s)u'] + \frac{\Sigma'(s)}{s} \frac{\partial v'}{\partial \phi} \\ \Delta \Phi' &= -4\pi G \Sigma' \delta(z) \end{aligned} \quad (2.98)$$

mit den radialen und azimuthalen Geschwindigkeitskomponenten  $u'(s, \phi, t)$  und  $v'(s, \phi, t)$ , sowie den Abweichungen der Dichte und des Potentials von den ungestörten Werten  $\Sigma'$  und  $\Phi'$ . Dieses Eigenwertproblem ist nur mit großem Aufwand und numerisch lösbar. Dennoch kann man eine oszillatorische, achsensymmetrische Eigenstörung als komplexe Welle approximieren.

$$\left. \begin{aligned} u'(s, t) &= C_1 \\ v'(s, t) &= C_2 \\ \mu'(s, t) &= C_3 \end{aligned} \right\} e^{iks} e^{i\Omega t} \quad (2.99)$$

Eingesetzt in (2.4.4) kommt Toomre zu dem Ergebnis, dass Störungen, die eine kritische Wellenzahl  $k_T$  überschreiten, instabil werden, d.h. sich vergrößern.

$$k_T = \frac{\kappa^2}{2\pi G \Sigma} \quad (2.100)$$

$\kappa$  ist hier die Epizykel-Frequenz und nicht mit der Opazität zu verwechseln! Nun besteht eine Akkretionsscheibe zwar nicht aus unzähligen einzelnen Sternen, jedoch lässt sich eine analoge Behandlung für Fluide oder eben Gasscheiben durchführen, wie sie Shu [1991] ausführlich vollzogen hat. Wieder wird die Störung linear um die Gleichgewichtslage approximiert und die Eulergleichungen und die Poissongleichung linearisiert. Die (unbekannten) Bestimmungsgrößen werden fourierzerlegt,

$$\begin{pmatrix} \Sigma' \\ u' \\ j' \\ \Phi' \end{pmatrix} = Re \left[ \begin{pmatrix} S \\ U \\ J \\ V \end{pmatrix} e^{i(\Omega t - m\phi)} \right] \quad (2.101)$$



und mit den Randbedingungen, dass die radiale Geschwindigkeit und der Drehimpuls der Störungen am Ursprung verschwinden

$$U(s=0) = 0, \quad J(s=0) = 0, \quad (2.102)$$

sowie Dichte und Gravitationspotential im Unendlichen verschwinden

$$S, V = 0 \quad \text{wenn} \quad s, \sqrt{s^2 + z^2} \rightarrow \infty. \quad (2.103)$$

Es ist beispielsweise das Gravitationspotential einer Störung gegeben durch

$$V(s, z=0) = A(s)e^{i\rho(s)}. \quad (2.104)$$

Nun wird in der WKBJ-Näherung<sup>5</sup> die Annahme dicht gepackter Spiralwellen gemacht, was bedeutet, dass sich die Phase schnell im Vergleich zur Amplitude ändert:

$$\left| \frac{d\rho}{ds} \right| \gg \left| \frac{1}{A} \frac{dA}{ds} \right| \quad (2.105)$$

Es ergibt sich eine Gesamtphase von

$$f(s, \phi, t) = \Omega t - m\phi + \rho(s) \quad (2.106)$$

Das Pluszeichen ist historische Konvention, der ursprünglichen Wahl von Lin und Shu folgend. Lösen der linearisierten Gleichungen mit obiger Annahme führt auf die WKBJ-Dispersionsrelation für Spiraldichtewellen:

$$(\Omega - m\omega)^2 = \kappa^2 + k^2 c_s^2 - 2\pi G|k|\Sigma_0 \quad (2.107)$$

$\Omega_{\text{CR}}$  ist die Korotationsgeschwindigkeit. Sie gibt den Absolutwert der Wellenzahl an, in Abhängigkeit von der Frequenz  $\Omega$  der Störung und den lokalen Gleichgewichtswerten der selbstgravitierenden Scheibe  $\omega(s)$ ,  $\kappa(s)$ ,  $c_s(s)$  und  $\Sigma(s)$ . Im Fall achsensymmetrischer Störungen,  $m = 0$ ,

$$\Omega^2 = \kappa^2 + k^2 c_s^2 - 2\pi G|k|\Sigma. \quad (2.108)$$

Für reelle  $k$  muss auch  $\Omega^2$  reell sein. Ist  $\Omega^2 > 0$ , oszillieren die Ringe (stabile Störung). Negative  $\Omega^2$  jedoch führen zu exponentiell wachsenden Ringen (instabile Störung). Betrachtet sei also die rechte Seite von (2.108). Differentielle Rotation, durch die Epizykel-Frequenz  $\kappa$  repräsentiert, trägt positiv bei, wirkt also stabilisierend. Der Druckterm  $k^2 c_s^2$  übt ebenfalls stabilisierende Wirkung aus, da der Überdruck in dichteren Regionen Materie wegstößt. Die Eigengravitation der Scheibe jedoch destabilisiert, da Regionen dichter Materie weitere Materie anziehen. Interessanterweise geht der Selbstgravitationsterm linear in  $|k|$  ein, praktisch vermittelnd zwischen den beiden stabilisierenden Effekten (die Rotation mit  $|k|^0$  und der Druck mit  $|k|^2$ ). Die Idee ist, dass es möglich sei, den Zerfall der Scheibe in Ringe ("clumping") auf allen Skalen zu unterdrücken. Es wird der Fall marginaler Stabilität untersucht, für den  $\Omega^2 = 0$ :

$$\begin{aligned} 1 + \frac{k^2 c_s^2}{\kappa^2} - \frac{2\pi G|k|\Sigma}{\kappa^2} &= 0 \\ 1 + \frac{Q^2}{4} \left( \frac{|k|}{k_T} \right)^2 - \frac{|k|}{k_T} &= 0 \quad , \end{aligned} \quad (2.109)$$

---

<sup>5</sup>oft bekannt als WKB-Näherung, ist ein Lösungsverfahren für Differentialgleichungen 2.Ordnung nach Wentzel, Kramer, Brillouin und Jeffreys

wobei die Wellenzahl in Einheiten der Toomre-Wellenzahl (2.100) angegeben ist. Der Toomre Parameter ist definiert durch:

$$Q \equiv \frac{\kappa c_s}{\pi G \Sigma} \quad (2.110)$$

Lösen von (2.109) liefert die Bedingung für marginale Stabilität:

$$Q = 2\sqrt{\zeta(1-\zeta)} \quad \text{mit} \quad \zeta = \frac{k_T}{k} \quad . \quad (2.111)$$

Ist  $Q < 1$ , dann existieren instabile Störungen mit Wellenlängen, die zu kurz sind, durch Rotation stabilisiert zu werden, und zu lang für Druck (bzw.  $c_s$ ). Andererseits werden achsensymmetrische Störungen über alle Wellenlängen stabilisiert, wenn:

$$Q \geq 1. \quad (2.112)$$

# Kapitel 3

## Numerische Behandlung der stationären Scheibengleichungen

### 3.1 Scheibengleichungen

Eine viskose, selbstgravitierende stationäre Scheibe ist durch folgende Gleichungen bestimmt:

die Lösung der Poisson - Gleichung (2.65)

$$\omega^2 = \frac{1}{(1 - r_s/s)^2} \left( \frac{GM_*}{s^3} + \frac{GM_d}{s^3} \right), \quad (3.1)$$

das Hydrostatische Gleichgewicht mit  $\rho_c \simeq 2\rho$  (2.24)

$$\frac{c_s^2 + P_r/\rho}{h^2} = \omega^2 + 4\pi G\rho, \quad (3.2)$$

die Drehimpulserhaltung (2.15)

$$\nu\Sigma = -\frac{\dot{M}\omega f(s)}{2\pi s\omega'} \quad (3.3)$$

und die Energieerhaltung bzw. der -transport (2.56)

$$\frac{1}{2}\nu\Sigma(s\omega')^2 = \frac{4\sigma}{3\tau}T^4, \quad (3.4)$$

sowie

$$P = \frac{\rho k_B T}{\mu m_H} + \frac{4\sigma T^4}{3c} \quad \text{Zustandsgleichung} \quad (3.5)$$

$$c_s^2 = \frac{P_g}{\rho} = \frac{k_B T}{\mu m_H} \quad \text{Schallgeschwindigkeit} \quad (3.6)$$

$$\rho = \frac{\Sigma}{2h} \quad \text{1-Zonen-Näherung} \quad (3.7)$$

$$\tau = \kappa \Sigma \quad \text{optische Dicke} \quad (3.8)$$

$$\kappa = \kappa(\rho, T, \dots) \quad \text{Opazität} \quad (3.9)$$

$$\nu = \begin{cases} \alpha c_s h & \alpha\text{-Ansatz} \\ \beta \omega s^2 & \beta\text{-Ansatz} \\ \delta c_s^2 / (\omega |\omega'|) & \text{diss.-begr. } \beta\text{-Ansatz} \end{cases} \quad \text{Viskosität} \quad (3.10)$$

$f(s)$  beinhaltet die Randbedingung und lautet (2.15):

$$f = 1 - \sqrt{\frac{s_*}{s}} \frac{1 - r_s/s}{1 - r_s/s_*}, \quad (3.11)$$

mit dem Sternradius  $s_*$  und dem Schwarzschildradius  $r_s$ . Die Gleichungen (3.1) bis (3.4) stellen die eigentlichen Grundgleichungen dar, die es zu lösen gilt. Druck, Opazität und Viskosität sind Materialfunktionen, Gleichungen (3.6), (3.7) und (3.8) Definitionen. Die Opazität hängt von Dichte und Temperatur ab, hauptsächlich aber vom vorliegenden Material und dessen Zustand (fest, gasförmig). In dieser Arbeit wird eine modifizierte Interpolationsformel<sup>1</sup> verwendet, welche die einzelnen Approximationen (siehe Tab. (3.1)) zusammenführt.

$$\frac{1}{\kappa} = \sqrt{\frac{1}{\kappa_{\text{Eis}}^2} + \frac{1}{1 + (T/T_0)^{10}} \frac{1}{\kappa_{\text{Eisv.}}^2 + \kappa_{\text{Staub}}^2}} + \sqrt{\frac{1}{\kappa_{\text{Staubv.}}^2 + \kappa_{\text{Mol}}^2 + \kappa_{\text{H}^-}^2}} + \frac{1}{1 + (T_0/T)^{10}} \sqrt{\frac{1}{\kappa_{\text{gf+ff}}^2 + \kappa_{\text{Es}}^2}} \quad (3.12)$$

So wie der Faktor  $1/(1 + (T/T_0)^{10})$  dafür sorgt, dass der zweite Term für  $T > T_0$  keinen Beitrag liefert, verhindert die Modifikation um den Faktor  $1/(1 + (T_0/T)^{10})$  vor der letzten Wurzel, dass diese bei niedrigen Temperaturen  $T < T_0$  beiträgt. Für  $T_0$  wird hier 3000 K gewählt.

## 3.2 Das Newton-Raphson-Verfahren

Eine gebräuchliche Methode, ein nichtlineares Gleichungssystem numerisch zu lösen, ist das Newton-Raphson-Verfahren. Es ist einfach zu implementieren und konvergiert recht schnell zur Lösung. Nachteil ist, dass es sehr gute Startwerte benötigt. Mit anderen Worten, es konvergiert lokal gut, global jedoch meist nur schlecht. Allgemein sucht das Verfahren zu  $N$  Gleichungen die gemeinsame Nullstelle. Die Funktionen werden nach Taylor reihenentwickelt

<sup>1</sup>entwickelt von Prof. Hans-Peter Gail, 1998, ITA Uni Heidelberg

	$\kappa_0$	$A$	$B$
Staub mit Eismänteln	$2 \cdot 10^{-4}$	0	2
Eisverdampfung	$1 \cdot 10^{16}$	0	-7
Staubteilchen	$1 \cdot 10^{-1}$	0	1/2
Staubverdampfung	$2 \cdot 10^{81}$	1	-24
Moleküle	$1 \cdot 10^{-8}$	2/3	3
H <sup>-</sup> -Ionen	$1 \cdot 10^{-36}$	1/3	10
Gebunden-frei und frei-frei Übergänge	$1.5 \cdot 10^{20}$	1	-5/2
Elektronenstreuung	0.348	0	0

Tabelle 3.1: Opazitäten aus Bell and Lin [1994] mit Ansatz  $\kappa = \kappa_0 \rho^A T^B$

und Terme zweiter und höherer Ordnung vernachlässigt:

$$F_i(\mathbf{x} + \delta\mathbf{x}) = F_i(\mathbf{x}) + \sum_{j=1}^N \frac{\partial F_i}{\partial x_j} \delta x_j + O(\delta\mathbf{x}^2) \quad (3.13)$$

bzw. in Matrixschreibweise

$$\mathbf{F}(\mathbf{x} + \delta\mathbf{x}) = \mathbf{F}(\mathbf{x}) + \mathbf{A}\delta\mathbf{x} \quad (3.14)$$

In der Praxis werden Anfangswerte  $\mathbf{x}$  in das GS gegeben und Korrekturen  $\delta\mathbf{x}$  gesucht, so dass  $\mathbf{F}(\mathbf{x} + \delta\mathbf{x}) = 0$ . Dies führt auf die Matrixgleichung

$$\mathbf{A}\delta\mathbf{x} = -\mathbf{F}(\mathbf{x}) \quad (3.15)$$

Dieses neue lineare Gleichungssystem lässt sich beispielsweise mit LU-Zerlegung und anschließender Vorwärts-/Rückwärts-Substitution lösen.<sup>2</sup> Das Gaußsche Eliminationsverfahren hat sich aufgrund der Rechnerarchitektur (Rundungsfehler) als nicht praktikabel herausgestellt.

### 3.3 Implementierung

Das Programm wurde in C geschrieben und löst im Newton-Raphson-Verfahren iterativ das stationäre Modell. Die vier Grundgleichungen werden als Funktionen der vier Unbekannten Dichte, Temperatur, Höhe und Winkelgeschwindigkeit umgeschrieben. Das oben geschilderte Verfahren sucht die gemeinsame Nullstelle. Es hat sich herausgestellt, dass die enormen Unterschiede der Terme in der Größenordnung zu Problemen führen. Um dies zu vermeiden und auch im Übrigen eine schnellere und stabilere Routine zu erhalten, werden die Gleichungen

<sup>2</sup>Nachzulesen in Press et al. [1992]

logarithmiert und für logarithmische Variablen gelöst. Dabei bedeutet:  $\bar{x} = \ln x$ .

$$\begin{aligned}
\omega^2 = \frac{G(M_* + M_d)}{s^3(1 - r_s/s)^2} & \rightarrow F_1 = 2\bar{\omega} - \ln G - \ln(M_* + M_d) + 3\bar{s} \\
& \quad + 2\ln(1 - r_s e^{-\bar{s}}) \\
\frac{c_s^2 + P_r/\rho}{h^2} = \omega^2 + 4\pi G\rho & \rightarrow F_2 = \ln\left(e^{2\bar{c}_s(\bar{\rho}, \bar{T})} + \frac{4\sigma}{3c} e^{4\bar{T} - \bar{\rho}}\right) \\
& \quad - 2\bar{h} - \ln(e^{2\bar{\omega}} + 4\pi G e^{\bar{\rho}}) \\
\nu\rho h = -\frac{\dot{M}\omega f(s)}{4\pi s\omega'} & \rightarrow F_3 = \bar{\nu} + \bar{\rho} + \bar{h} - \ln\left(-\frac{\dot{M}f(s)}{4\pi\bar{\omega}'}\right) \\
2\nu\rho^2 h^2 (s\omega')^2 = \frac{4\sigma T^4}{3\kappa} & \rightarrow F_4 = \bar{\nu} + 2(\bar{\rho} + \bar{h} + \bar{\omega}) + \ln\bar{\omega}'^2 \\
& \quad - \ln\frac{2\sigma}{3} - 4\bar{T} + \bar{\kappa}(\bar{\rho}, \bar{T})
\end{aligned}$$

Dabei ist

$$\bar{\omega}' = \frac{\partial \ln \omega}{\partial \ln s} = \frac{s}{\omega} \frac{\partial \omega}{\partial s} \quad (3.16)$$

NSG-Scheiben drehen sich keplersch, d.h.

$$\bar{\omega}' = \frac{s}{\omega} \left(-\frac{3}{2} \frac{\omega}{s}\right) = -\frac{3}{2} \quad (3.17)$$

Das obige Gleichungssystem kann also an jedem Radius einzeln gelöst werden. Dazu muss die Radiusvariable  $s$  diskretisiert werden. Da sich mit dem Radius, nicht zuletzt durch die Randbedingung, die physikalischen Größen nahe am inneren Rand deutlich, in den äußeren Regionen der Scheibe jedoch gering variieren, bietet sich ein logarithmisches Gitter an. Die Stützstellen des Gitters sehen wie folgt aus:

$$s_j = s_{\min} e^{jW} \quad (3.18)$$

Die Schrittweite läßt sich über  $W$  festlegen, der innere Rand  $s_{\min}$  wird bei Akkretionsscheiben um Schwarze Löcher bei drei Schwarzschildradien festgelegt. Bei einer Schrittweite von  $W = 0.01$  bekommt man bis zum Außenrand  $s_{\max} = 10^a r_s$  ungefähr

$$j = 230a - 100 \quad (3.19)$$

Gitterpunkte. Hat man an einem Gitterpunkt eine Lösung gefunden, liefert diese am folgenden Punkt die Startwerte. Solange sich die Struktur, bsp. durch dominante Terme in den Gleichungen, nicht zu schnell ändert, kann das Gleichungssystem von innen nach außen für alle Punkte gelöst werden. Hinreichend gute Startwerte am inneren Rand zu finden kann schwierig sein. Dabei haben sich  $\beta$ -Scheiben als wesentlich unempfindlicher erwiesen, als  $\alpha$ -Scheiben. Es ist jedoch kein Problem, das Modell (NSG) von außen nach innen zu rechnen, und die so erhaltenen Werte am inneren Rand für spätere Rechnungen zu nutzen. Auf diese Weise werden Werte für Dichte und Temperatur besorgt, die Höhe läßt sich dann mittels Gln. (3.2) bestimmen, die Winkelgeschwindigkeit hängt nur vom Radius ab. Anders verhält es sich für voll selbstgravitierende Scheiben.  $\omega$  hängt nun auch von der Scheibenmasse ab,

die wiederum Ring für Ring aufsummiert wird. Entscheidender Unterschied ist, dass über  $\bar{\omega}'$  eine radiale Kopplung des Systems stattfindet und die Iteration an einem Gitterpunkt nicht mehr unabhängig vom letzten Punkt ist. Die radiale Ableitung der Winkelgeschwindigkeit wird numerisch bestimmt. Angenommen, das System wurde am Radius  $s_{j-1}$  zur Selbstkonsistenz gebracht, wird die (bekannte) Ableitung ins Gleichungssystem gegeben und im Laufe der Iterationsschritte aktualisiert:

$$\bar{\omega}'_j = \frac{\bar{\omega}_j - \bar{\omega}_{j-1}}{\bar{s}_j - \bar{s}_{j-1}} \quad (3.20)$$

Die Werte bei  $j - 1$  sind bereits bekannt! Die Scheibenmasse wird folgendermaßen bestimmt:

$$\begin{aligned} M_d(s_j) &= \pi \sum_{k=1}^j \frac{\Sigma_k - \Sigma_{k-1}}{2} (s_k^2 - s_{k-1}^2) \\ &= \pi \sum_{k=1}^j (\rho_j h_j - \rho_{j-1} h_{j-1}) (s_k^2 - s_{k-1}^2), \end{aligned} \quad (3.21)$$

und hängt offensichtlich von Dichte und Temperatur ab. Auch diese Ableitungen werden numerisch aus Differenzenquotienten bestimmt. Es werden jedoch nicht die Werte am vorigen Gitterpunkt verwendet, was eine radiale Abhängigkeit spiegeln würde, die nicht vorhanden ist, sondern kleine Variationen von  $\rho$  und  $h$ :

$$\frac{\partial M_d}{\partial \rho} = \frac{M_d(\rho + \Delta\rho) - M_d(\rho)}{\Delta\rho}; \quad \text{analog für } h \quad (3.22)$$

Wie erhält man nun die Werte für  $j = 1$ ? Am inneren Rand ist die Scheibe sicher NSG und damit keplersch.  $\bar{\omega}'$  ist aus Gln. (3.17) bekannt, die Scheibenmasse  $M_d = 0$ . Die Ableitungen der Scheibenmasse werden Null gesetzt.

### 3.3.1 Doppellösungen

Es hat sich herausgestellt, dass eine Instabilität auftritt, die mit dem rapiden Abfall der Opazität zusammenhängt, wenn  $H^-$ -Absorption einsetzt (siehe 4.0.3). Da das Gleichungssystem vom inneren Scheibenrand an nach außen hin gelöst wird, um die Scheibenmasse numerisch mitzunehmen, wird auf einen Trick zurückgegriffen, um auch die zweite Lösung zu erhalten, die sich ergäbe, würde man von außen nach innen rechnen. Durch den Sprung ändern sich neben Temperatur und Opazität auch Dichte und Scheibenhöhe, und damit im Allgemeinen auch die Flächendichte und somit die eingeschlossene Scheibenmasse. Um den korrekten Anschluss beider Lösungen mit konsistenten Scheibenmassen zu erhalten, wird die erste Lösung mit der kompletten Opazität (3.12) gerechnet, während bei der zweiten Lösung nur die Teilabsorptionen bis einschließlich der Molekülabsorption verwendet werden. Den richtigen Anschluss an die erste Lösung mit den übrigen Opazitäten findet man durch Vergleich beider Gesamtopazitäten an jedem Radius, von innen nach außen. Stimmen diese überein, hat man den zweiten Ast gefunden.

### 3.3.2 Parameter

Das vorliegende Scheibenmodell hat 5 freie Parameter. Dies sind zunächst die Zentralmasse  $M_*$ , die Massenakkretionsrate  $\dot{M}$ , die Viskositätsparameter  $\alpha$  und  $\beta$  ( $\delta$  hängt von  $\alpha$  ab) und

nicht zuletzt der innere Rand der Scheibe. Dazu müssen geeignete Werte bzw. Parametrisierungen für das mittlere Molekulargewicht und die Opazität gewählt werden. Im Folgenden sollen die verwendeten Werte(-bereiche) angegeben (siehe Tabelle 3.2) und motiviert werden. Der innerste Scheibenradius wird zu  $s_{\min} = 3.01 r_s$  gewählt (2.2). Bei Akkretionsscheiben um weniger massive Schwarze Löcher oder Sterne von  $1 \dots 10^2 M_\odot$  liegt der gewählte innere Radius bei einigen Bruchteilen einer Astronomischen Einheit. Einer der wichtigsten Parameter ist neben der Zentralmasse die Akkretionsrate, die großen Einfluss auf die Struktur der Scheibe hat und über welche man direkt die Scheibenmasse steuern kann. Also gewissermaßen die “Selbstgravitativität” der Scheibe. Für Akkretionsscheiben in Galaxienzentren, wie beispielsweise in unserer Milchstraße um Sagittarius A vermutet, sind Werte zwischen  $10^{-5}$  und  $10^{-7} M_\odot/\text{yr}$  üblich. In AGN und Quasaren vermutet man aufgrund der spektralen Energieverteilung weitaus höhere Akkretionsraten bis zu  $10^2 M_\odot/\text{yr}$ .

Zentralmasse	$M_*$	$10^5 \dots 10^{10} M_\odot$
Massenakkretionsrate	$\dot{M}$	$10^{-3} \dots 10^2 M_\odot/\text{a}$
Startradius	$s_{\min}$	$3.01 r_s$
Viskositätsparameter	$\alpha$	$10^{-2} \dots 1.0$
	$\beta$	$10^{-5}, 10^{-3}$

Tabelle 3.2: Parametersatz für das stationäre Scheibenmodell



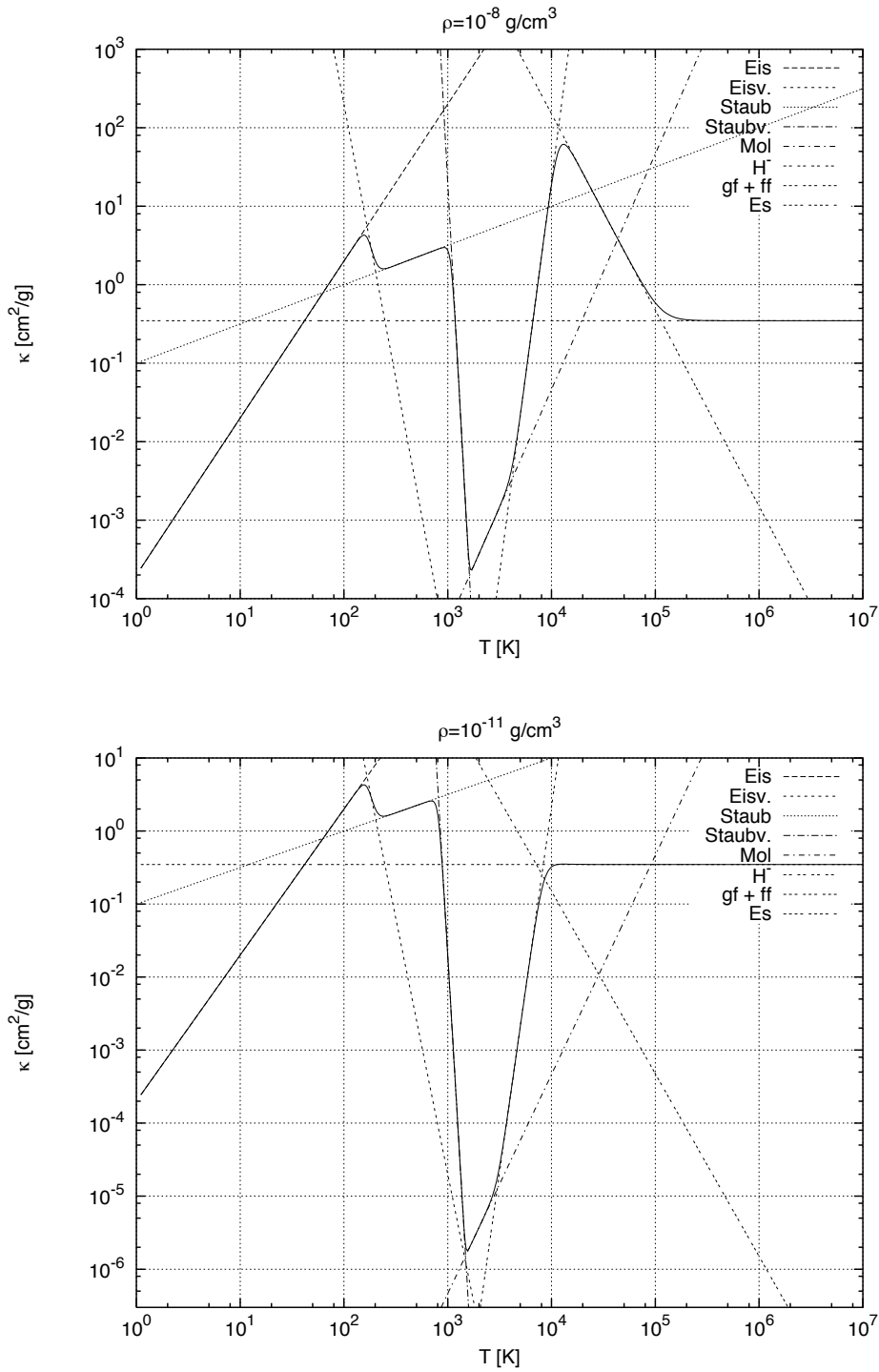


Abbildung 3.1: Die Opazität als Funktion von Dichte und Temperatur, aufgetragen über die Temperatur bei Festhalten der Dichte bei  $10^{-8}$  bzw.  $10^{-11} \text{ g/cm}^3$ . Die durchgezogene Kurve ist die (modifizierte, siehe Text) Gailsche Interpolation zwischen den einzelnen Absorbern.

# Kapitel 4

## Lösungen

Grundsätzlich wurden die Modelle mit den Parametern aus Tabelle 3.2 gerechnet, als Viskositätsparameter jedoch zunächst nur die Kombination  $\alpha = 0.1$  (üblich für Scheiben in AGN) und  $\beta = 10^{-5}$ . Obwohl für  $\beta$  ein Wert von  $10^{-3}$  gebräuchlich ist, fiel die Wahl auf den geringeren Wert (Huré et al. [2001]), da sich herausgestellt hat, dass sich die gerechneten Scheiben fast im gesamten Parameterraum und über alle Radien im dissipativen Limit befinden:

$$\sqrt{\beta}v_\phi \geq \sqrt{1.5\alpha}c_s \quad (4.1)$$

Ein höherer Wert für  $\beta$  würde die Turbulenzgeschwindigkeit weiter anheben und  $\beta$ -Scheiben erst bei noch geringeren Zentralmassen mit höheren Akkretionsraten ermöglichen. In welchen Bereichen zumindest abschnittsweise  $\beta$ -Scheiben auftreten, soll noch eingegangen werden. Nachfolgend sind in Tabelle 4.1 die Radien eingetragen, ab denen die Scheiben vertikal bzw. radial selbstgravitierend werden.

$M_*$	$10^{10} M_\odot$		$10^9 M_\odot$		$10^8 M_\odot$		$10^7 M_\odot$		$10^6 M_\odot$		$10^5 M_\odot$	
	KSG	FSG	KSG	FSG	KSG	FSG	KSG	FSG	KSG	FSG	KSG	FSG
100	Vis.		ab $s [10^3 r_s]$		ab $s [10^3 r_s]$		ab $s [10^3 r_s]$		ab $s [10^3 r_s]$		ab $s [10^3 r_s]$	
	$\delta$	0.09	0.40	1.4	1.59	2.7 <sup>b</sup>	4.2	2.7 <sup>b</sup>	13.3	2.7 <sup>b</sup>	44	2.7 <sup>b</sup>
10	$\alpha$	0.213	1.013	—	4.72	—	21.4*	—	94*	—	395*	—
	$\delta$	0.06	0.28	4.3	1.3	11.3 <sup>b</sup>	4.0	11.9 <sup>b</sup>	10.1	11.9 <sup>b</sup>	28.2	11.9 <sup>b</sup>
1	$\alpha$	0.098	0.474	—	2.24	—	10.41	—	47.74	—	220*	—
	$\delta$	0.05	2.0 (1.8)	0.21	5.4 (4.4)	0.95	17.8 (13.7)	4.25	55 <sup>b</sup>	10.3	55 <sup>b</sup>	25.5
0.1	$\alpha$	0.052	0.247	—	1.16	—	5.45	—	25.3	—	116.6	—
	$\delta$	0.06	10.5	0.27	25.3 (24.8)	1.23	46.5	5.64	99 (90)	16.3	250 <sup>b</sup> (201)	34.3
$10^{-2}$	$\alpha$	0.058	0.258	—	1.18	—	5.40	—	25.0	—	115.3	—
	$\delta$	0.06 <sup>a</sup>	26.5	0.30 <sup>a</sup>	79.5	1.45 <sup>a</sup>	216	6.8 <sup>a</sup>	540	32.3 <sup>a</sup>	1117 <sup>b</sup>	90.3
$10^{-3}$	$\alpha$	0.06 <sup>a</sup>	0.55	0.32 <sup>a</sup>	—	1.54 <sup>a</sup>	8.4	7.20 <sup>a</sup>	31.9	33.25 <sup>a</sup>	122	155.1 <sup>a</sup>
	$\delta$	0.09	40	0.28	126.1	1.07	397	4.5	1240	20	3865	90
$10^{-4}$	$\alpha$	0.05	0.14	—	0.55	—	2.55	—	12.20	—	57.5	—

Tabelle 4.1: Die Radien, an denen die Akkretionsscheiben keplersch bzw. voll selbstgravitierend werden als Funktion von Zentralmasse  $M_*$  und Akkretionsrate  $\dot{M}$  für  $\delta$ - und  $\alpha$ -Scheiben. Die geklammerten Werte beziehen sich auf die "kalten" Äste, die natürlich eine andere Scheibenmasse aufweisen (siehe Text). Fehlt der Wert, tritt die therm. Instabilität erst zu größeren Radien auf, d.h. die Scheibenmasse ist für beide Lösungen identisch.

<sup>a</sup>hier liegt die thermische Instabilität direkt im Übergang zu keplerscher Selbstgravitation.

<sup>b</sup>zumindest an diesem Radius ist die Scheibe durch  $\beta$ -Viskosität bestimmt mit  $\beta = 10^{-5}$ .

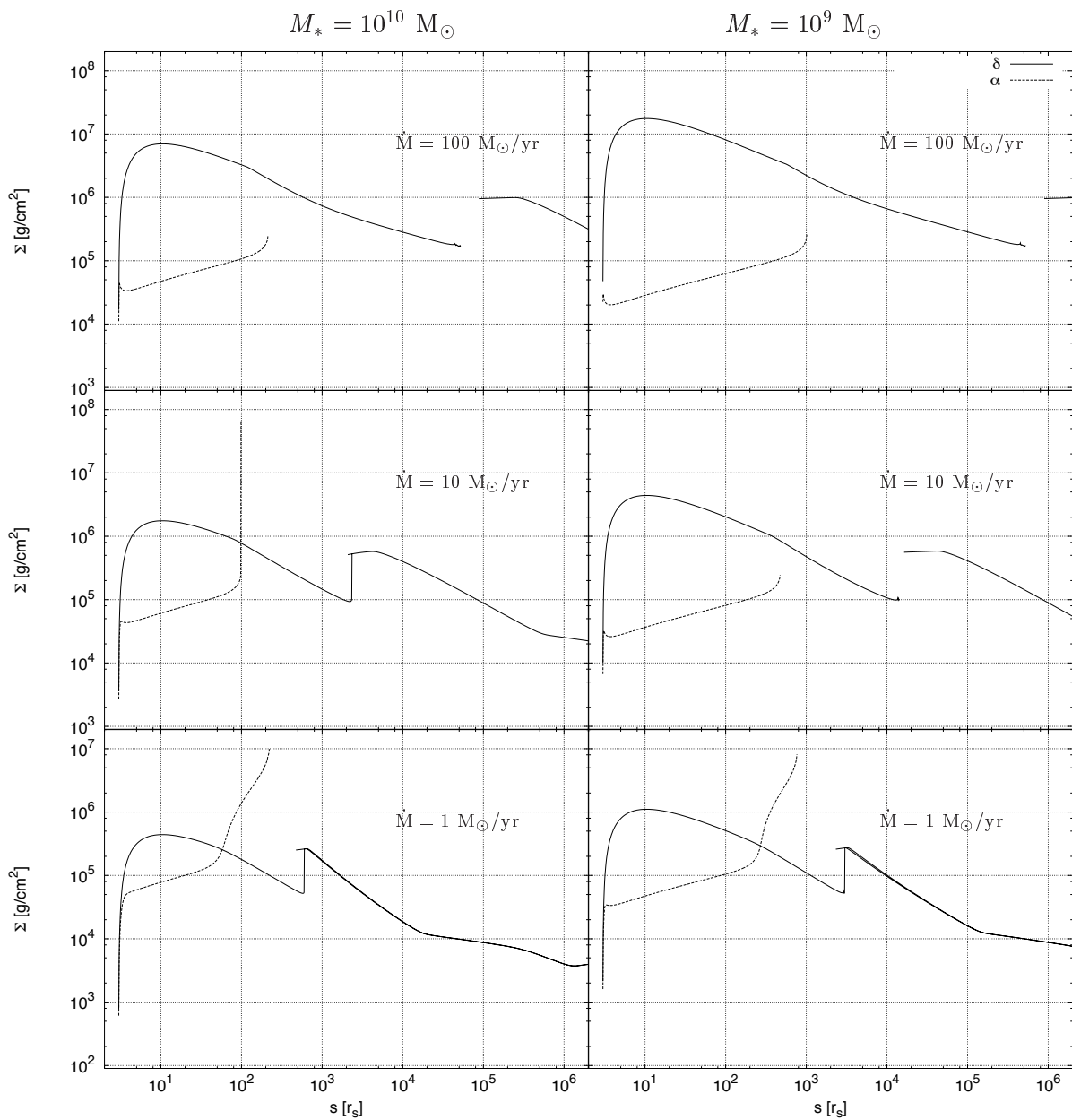


Abbildung 4.1: Die Flächendichte als Funktion des Radius für Zentralmassen von  $10^{10}$  und  $10^9$  Sonnenmassen und Akkretionsraten von  $10^2 \dots 1 M_\odot$  pro Jahr. Aufgetragen sind die Kurven für eine  $\beta$ -Scheibe im dissipationsbegrenzten Limes ( $\beta = 10^{-5}$ ) und eine  $\alpha$ -Scheibe ( $\alpha = 0.1$ ).

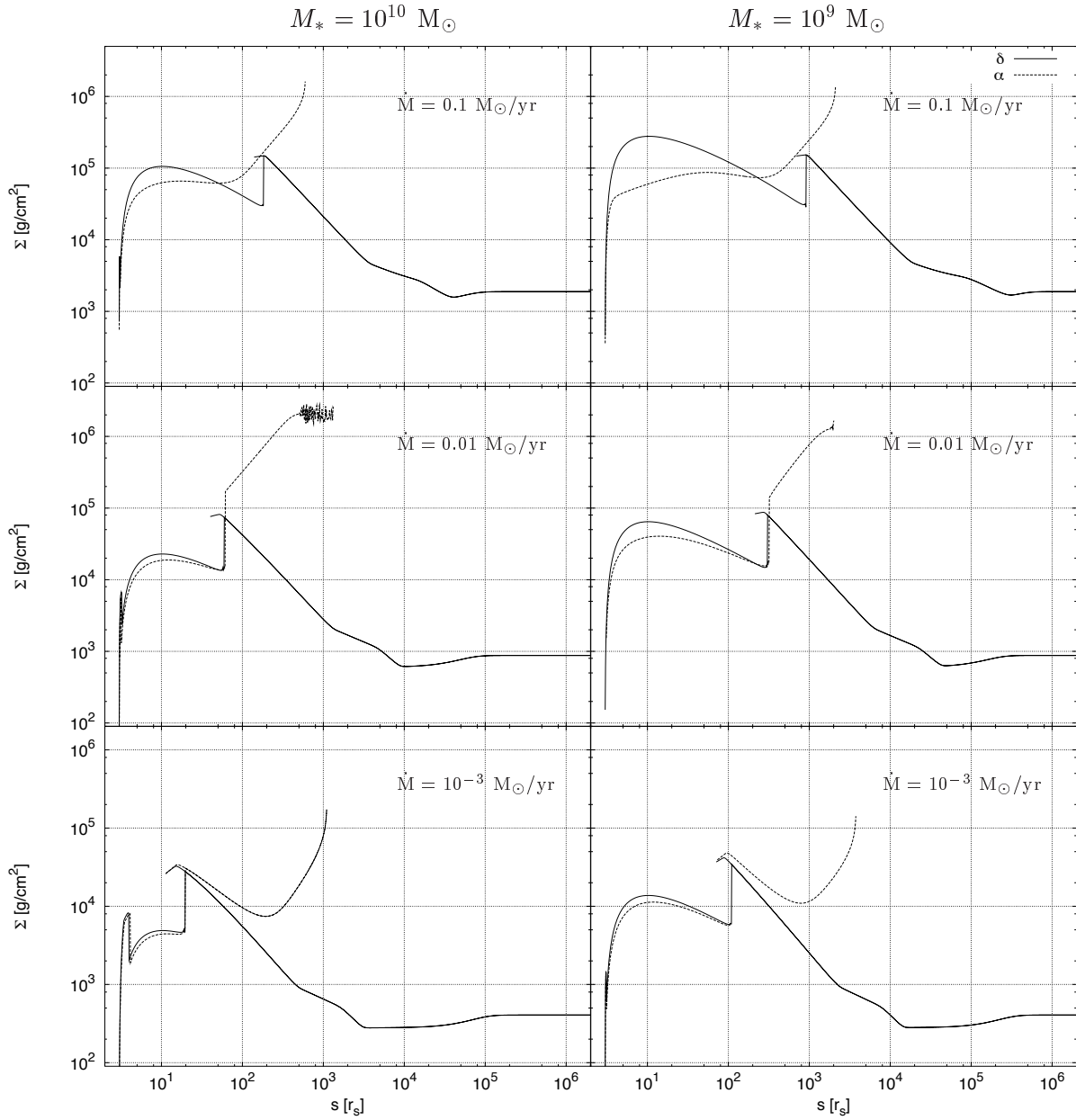


Abbildung 4.2: Die Flächendichte als Funktion des Radius für Zentralmassen von  $10^{10}$  und  $10^9$  Sonnenmassen und Akkretionsraten von  $10^{-1} \dots 10^{-3} M_{\odot}$  pro Jahr. Aufgetragen sind die Kurven für eine  $\beta$ -Scheibe im dissipationsbegrenzten Limes ( $\beta = 10^{-5}$ ) und eine  $\alpha$ -Scheibe ( $\alpha = 0.1$ ).

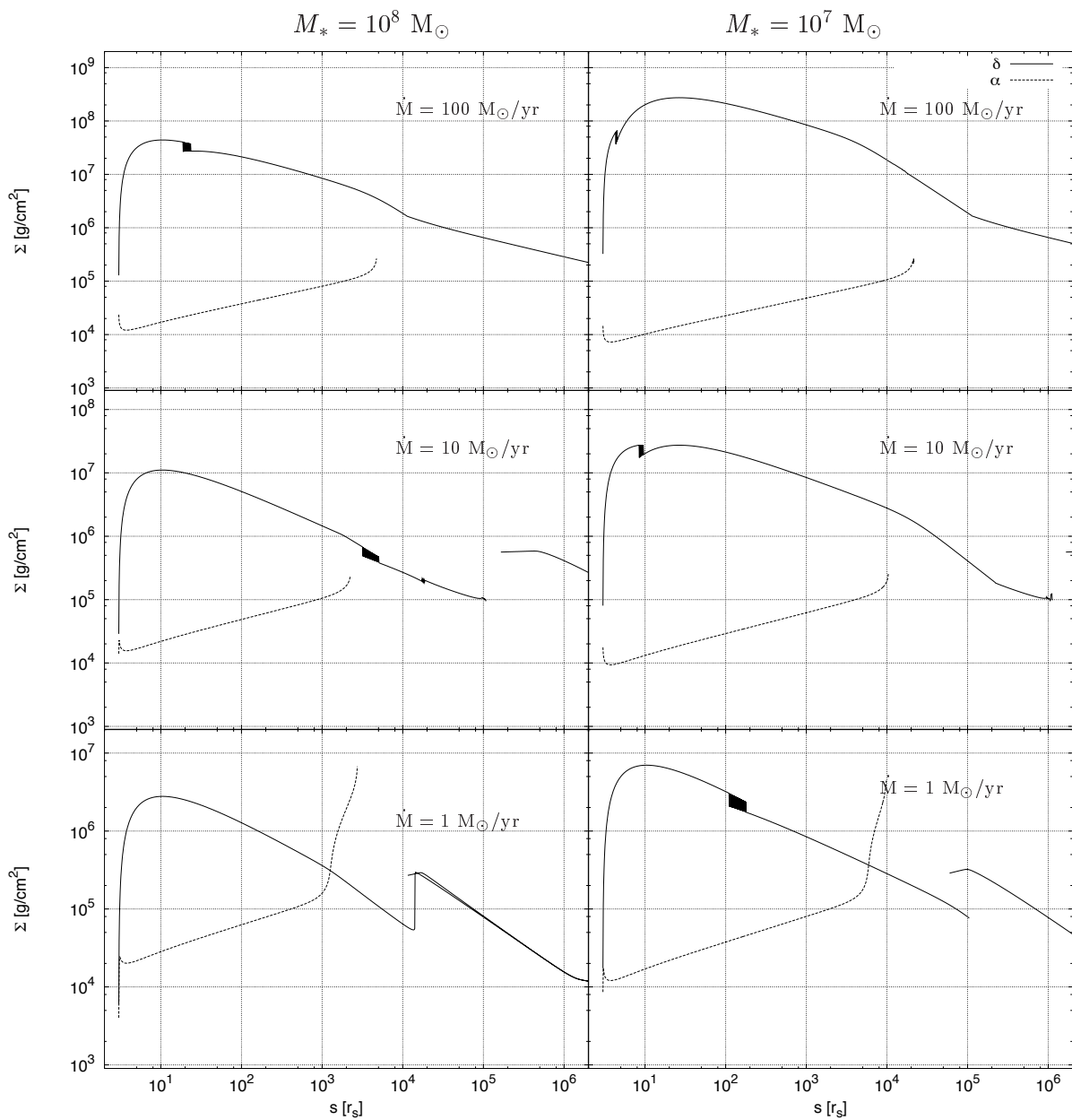


Abbildung 4.3: Die Flächendichte als Funktion des Radius für Zentralmassen von  $10^8$  und  $10^7$  Sonnenmassen und Akkretionsraten von  $10^2 \dots 1 M_\odot$  pro Jahr. Aufgetragen sind die Kurven für eine  $\beta$ -Scheibe im dissipationsbegrenzten Limes ( $\beta = 10^{-5}$ ) und eine  $\alpha$ -Scheibe ( $\alpha = 0.1$ ).

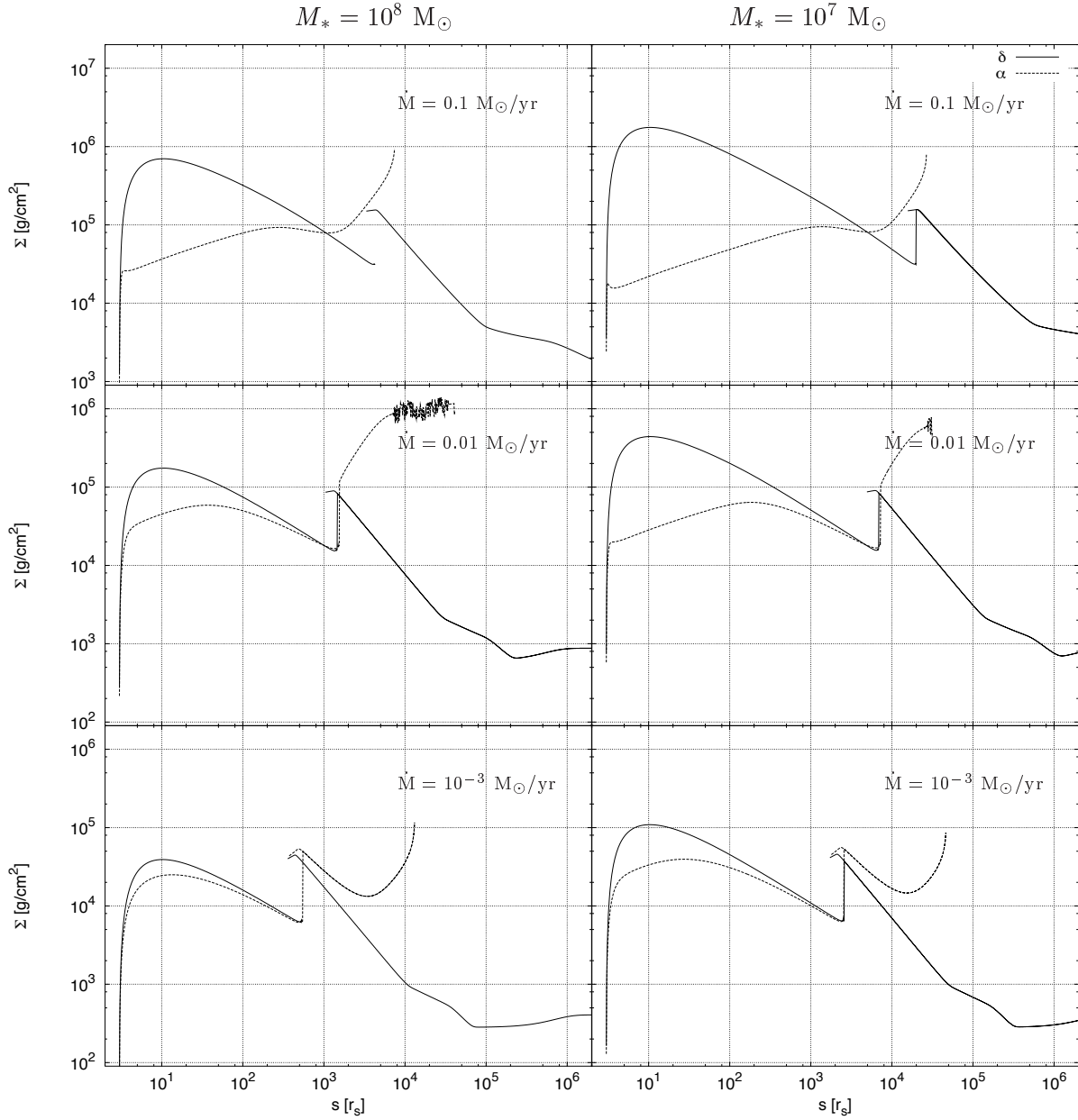


Abbildung 4.4: Die Flächendichte als Funktion des Radius für Zentralmassen von  $10^8$  und  $10^7$  Sonnenmassen und Akkretionsraten von  $10^{-1} \dots 10^{-3} M_{\odot}$  pro Jahr. Aufgetragen sind die Kurven für eine  $\beta$ -Scheibe im dissipationsbegrenzten Limes ( $\beta = 10^{-5}$ ) und eine  $\alpha$ -Scheibe ( $\alpha = 0.1$ ).

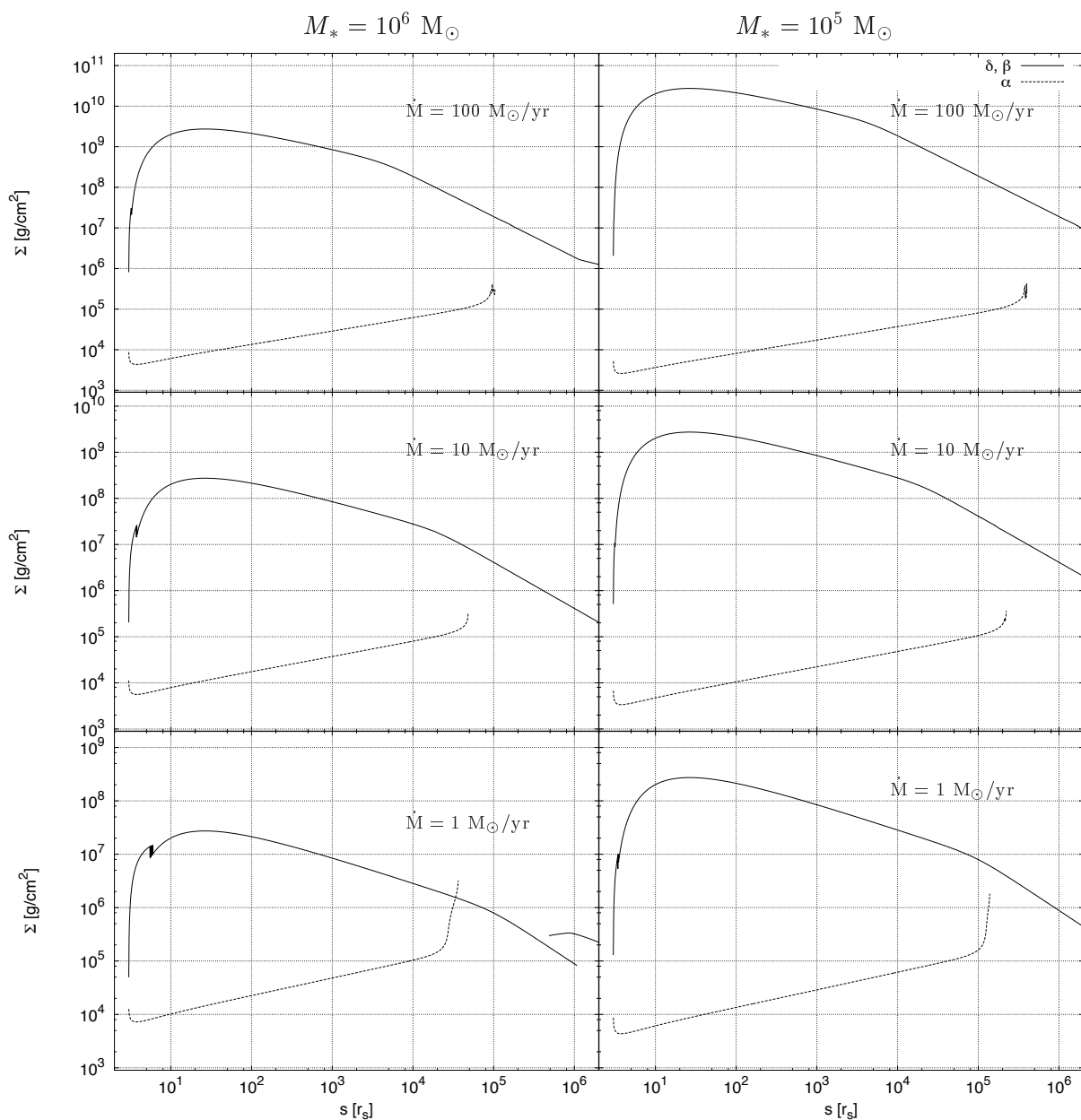


Abbildung 4.5: Die Flächendichte als Funktion des Radius für Zentralmassen von  $10^6$  und  $10^5$  Sonnenmassen und Akkretionsraten von  $10^2 \dots 1 M_\odot$  pro Jahr. Aufgetragen sind die Kurven für eine  $\beta$ -Scheibe im dissipationsbegrenzten Limes ( $\beta = 10^{-5}$ ) und eine  $\alpha$ -Scheibe ( $\alpha = 0.1$ ).



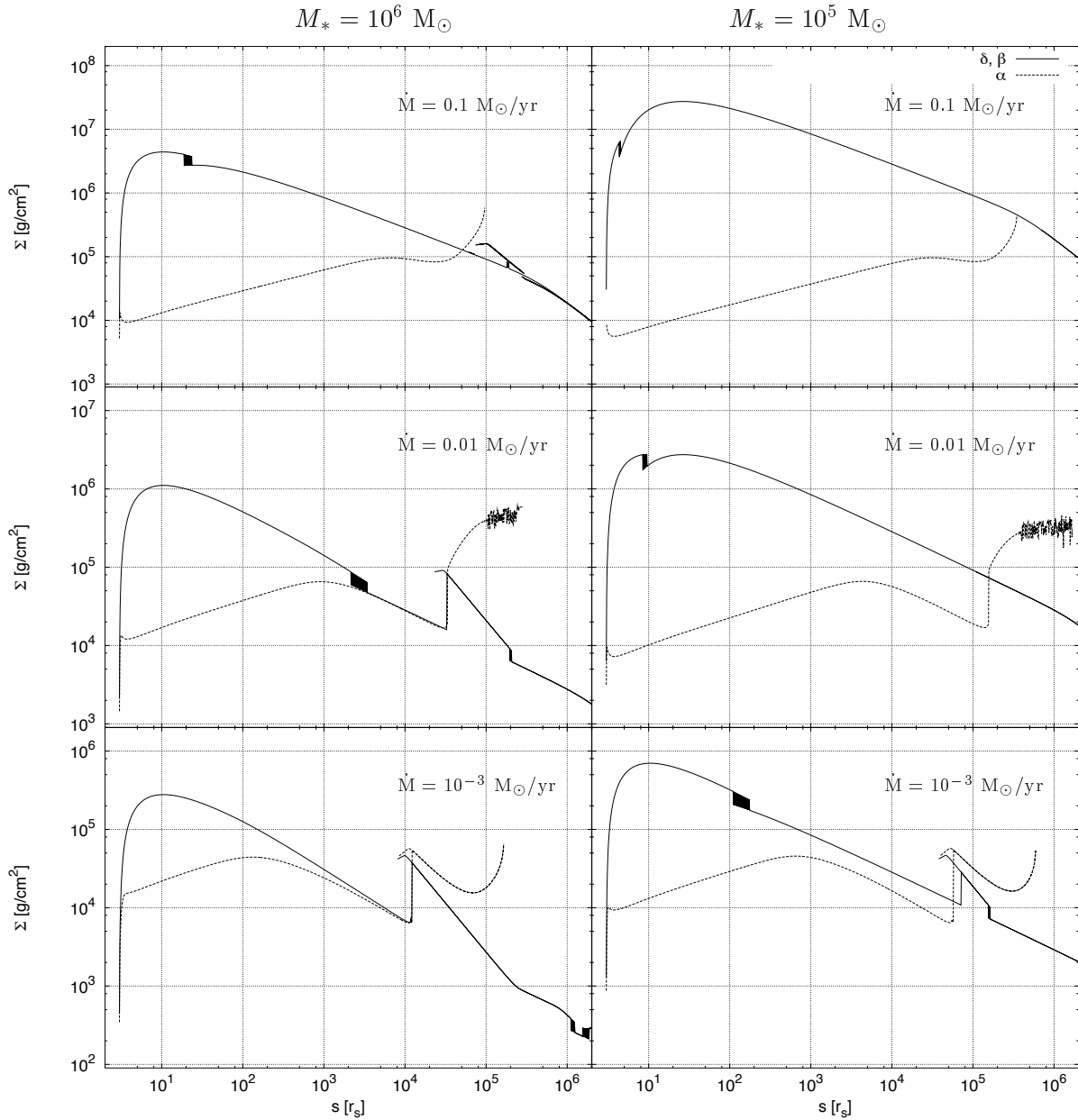


Abbildung 4.6: Die Flächendichte als Funktion des Radius für Zentralmassen von  $10^6$  und  $10^5$  Sonnenmassen und Akkretionsraten von  $10^{-1} \dots 10^{-3} M_{\odot}$  pro Jahr. Aufgetragen sind die Kurven für eine  $\beta$ -Scheibe im dissipationsbegrenzten Limes ( $\beta = 10^{-5}$ ) und eine  $\alpha$ -Scheibe ( $\alpha = 0.1$ ).

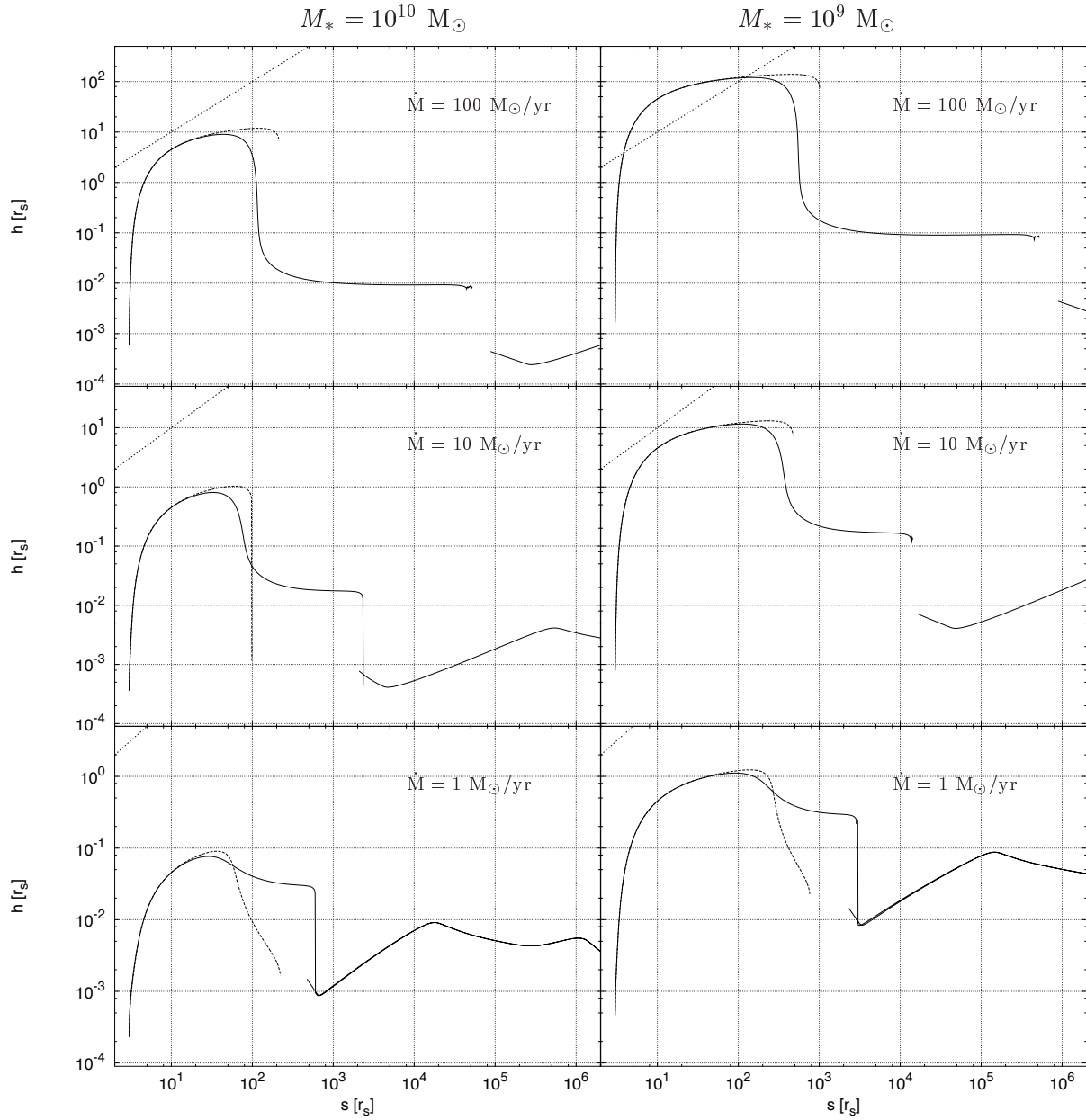


Abbildung 4.7: Die halbe Scheibendicke als Funktion des Radius für Zentralmassen von  $10^{10}$  und  $10^9$  Sonnenmassen und Akkretionsraten von  $10^2 \dots 1 M_\odot$  pro Jahr. Aufgetragen sind die Kurven für eine  $\beta$ -Scheibe im dissipationsbegrenzten Limes ( $\beta = 10^{-5}$ ) und eine  $\alpha$ -Scheibe ( $\alpha = 0.1$ ). Die Winkelhalbierende  $h/s$  zeigt an, wo die Scheibe dick bzw. dünn ist.

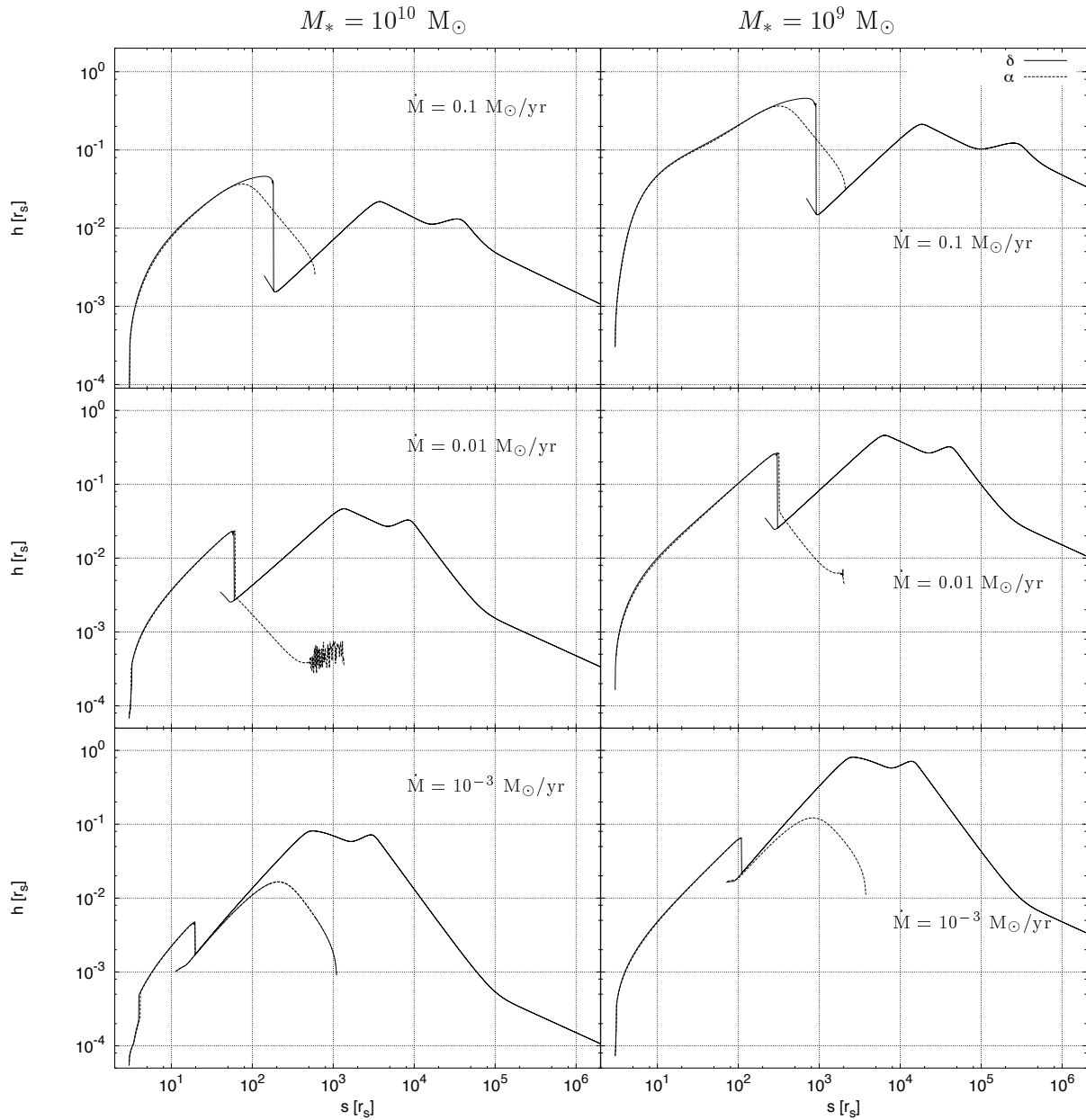


Abbildung 4.8: Die halbe Scheibendicke als Funktion des Radius für Zentralmassen von  $10^{10}$  und  $10^9$  Sonnenmassen und Akkretionsraten von  $10^{-1} \dots 10^{-3} M_{\odot}$  pro Jahr. Aufgetragen sind die Kurven für eine  $\beta$ -Scheibe im dissipationsbegrenzten Limes ( $\beta = 10^{-5}$ ) und eine  $\alpha$ -Scheibe ( $\alpha = 0.1$ ). Die Winkelhalbierende  $h/s$  zeigt an, wo die Scheibe dick bzw. dünn ist.

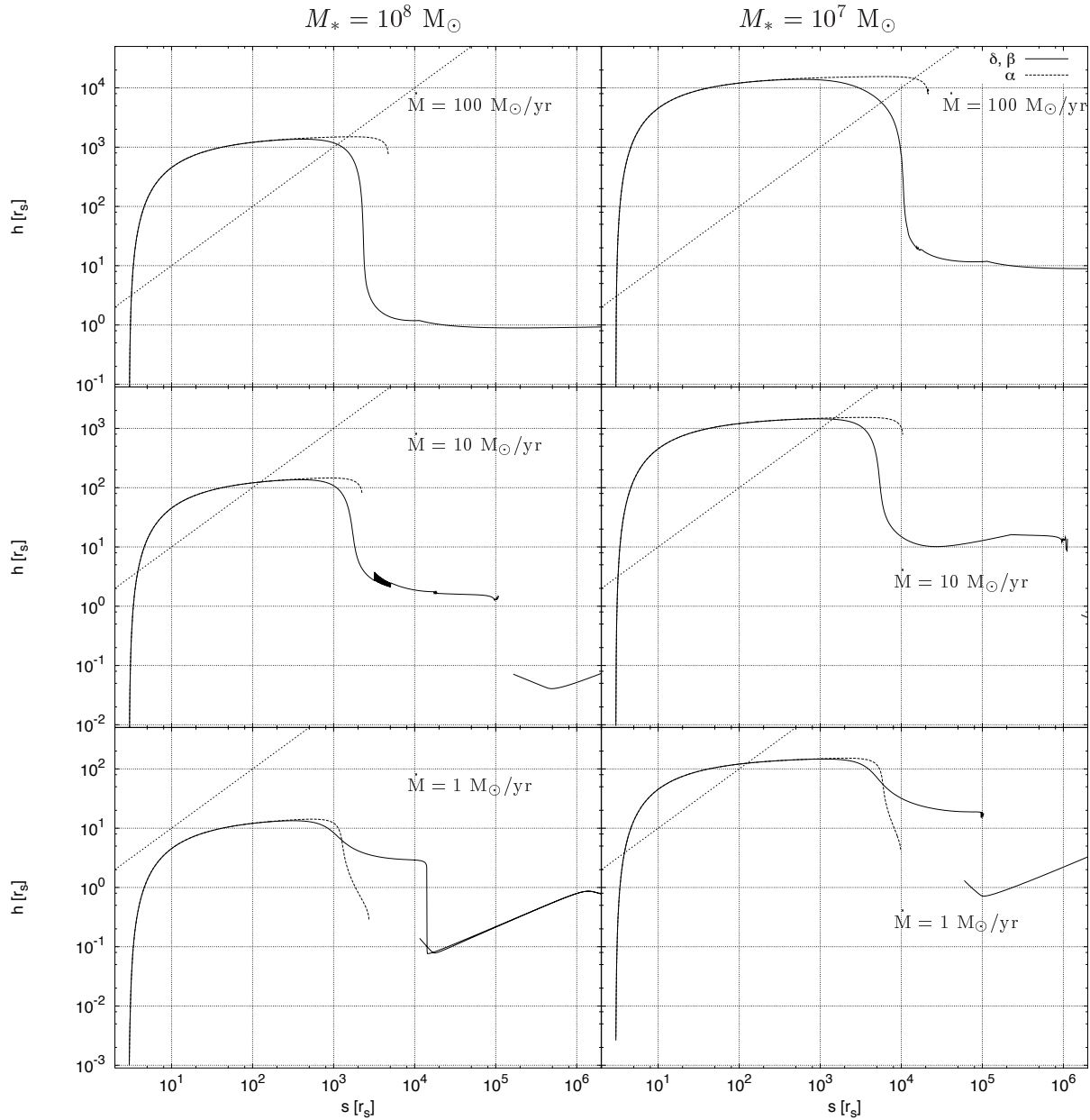


Abbildung 4.9: Die halbe Scheibendicke als Funktion des Radius für Zentralmassen von  $10^8$  und  $10^7$  Sonnenmassen und Akkretionsraten von  $10^2 \dots 1 M_\odot$  pro Jahr. Aufgetragen sind die Kurven für eine  $\beta$ -Scheibe im dissipationsbegrenzten Limes ( $\beta = 10^{-5}$ ) und eine  $\alpha$ -Scheibe ( $\alpha = 0.1$ ). Die Winkelhalbierende  $h/s$  zeigt an, wo die Scheibe dick bzw. dünn ist.

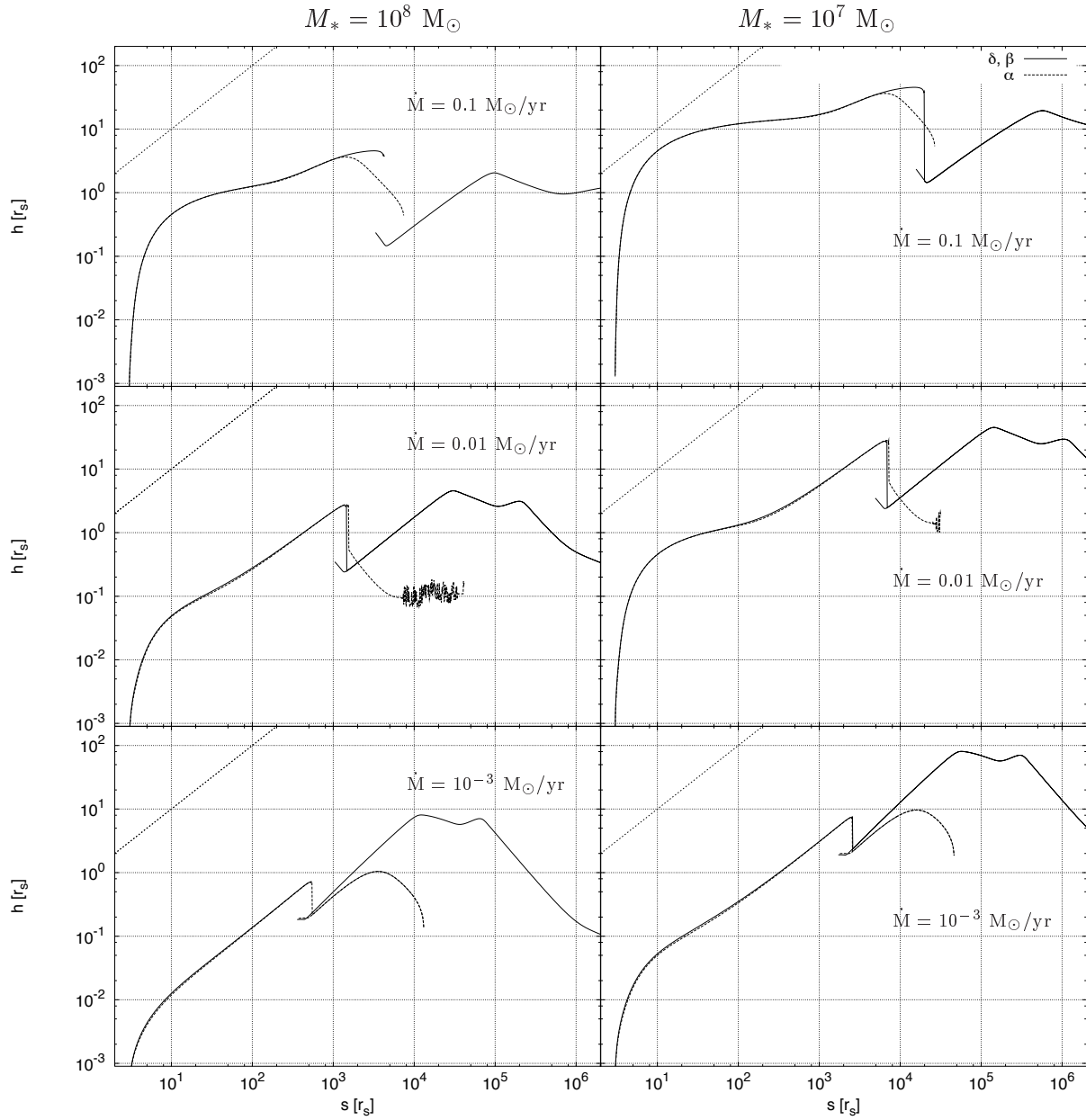


Abbildung 4.10: Die halbe Scheibendicke als Funktion des Radius für Zentralmassen von  $10^8$  und  $10^7$  Sonnenmassen und Akkretionsraten von  $10^{-1} \dots 10^{-2} M_{\odot}$  pro Jahr. Aufgetragen sind die Kurven für eine  $\beta$ -Scheibe im dissipationsbegrenzten Limes ( $\beta = 10^{-5}$ ) und eine  $\alpha$ -Scheibe ( $\alpha = 0.1$ ). Die Winkelhalbierende  $h/s$  zeigt an, wo die Scheibe dick bzw. dünn ist.

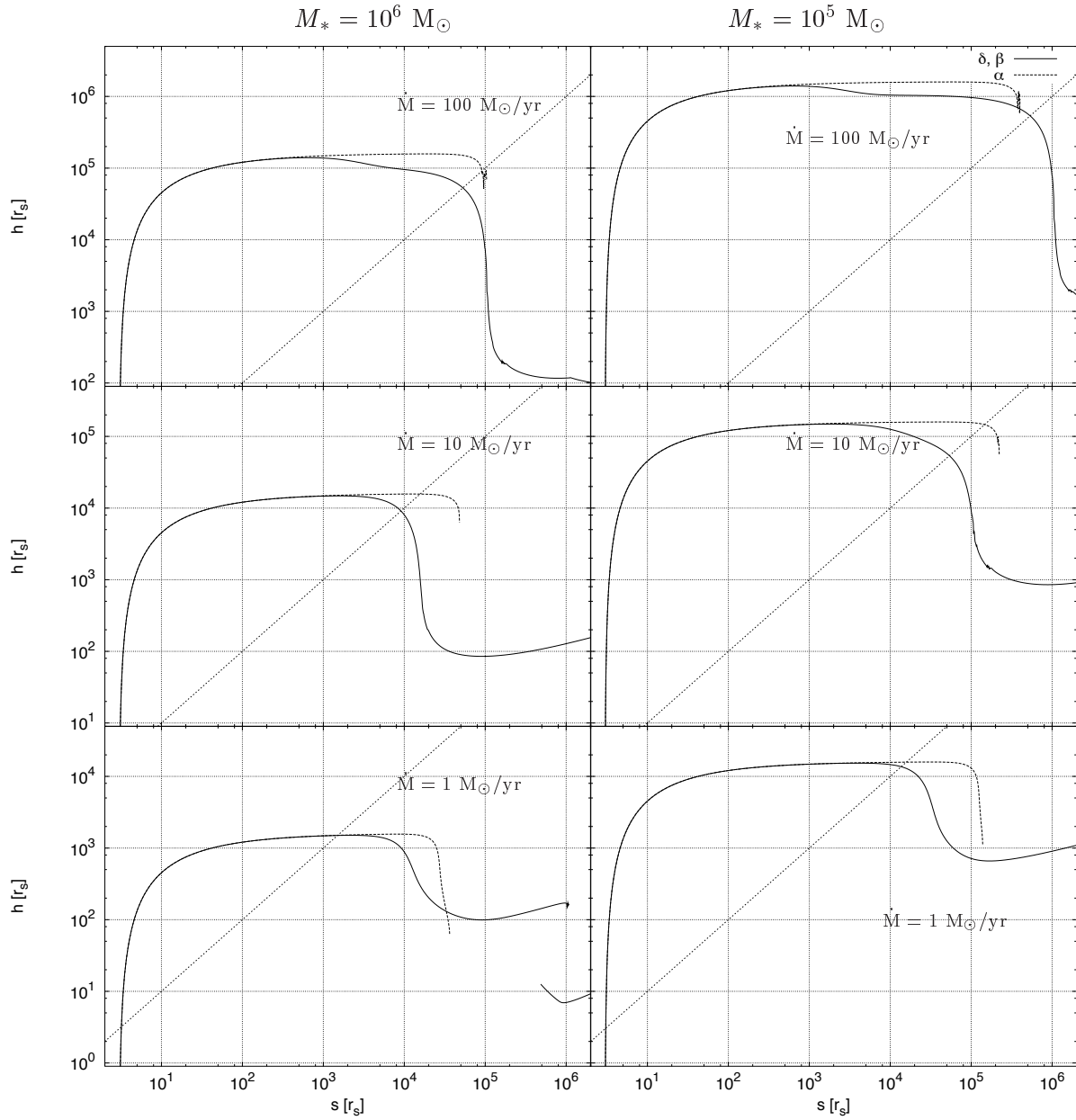


Abbildung 4.11: Die halbe Scheibendicke als Funktion des Radius für Zentralmassen von  $10^6$  und  $10^5$  Sonnenmassen und Akkretionsraten von  $10^2 \dots 1 M_\odot$  pro Jahr. Aufgetragen sind die Kurven für eine  $\beta$ -Scheibe im dissipationsbegrenzten Limes ( $\beta = 10^{-5}$ ) und eine  $\alpha$ -Scheibe ( $\alpha = 0.1$ ). Die Winkelhalbierende  $h/s$  zeigt an, wo die Scheibe dick bzw. dünn ist.

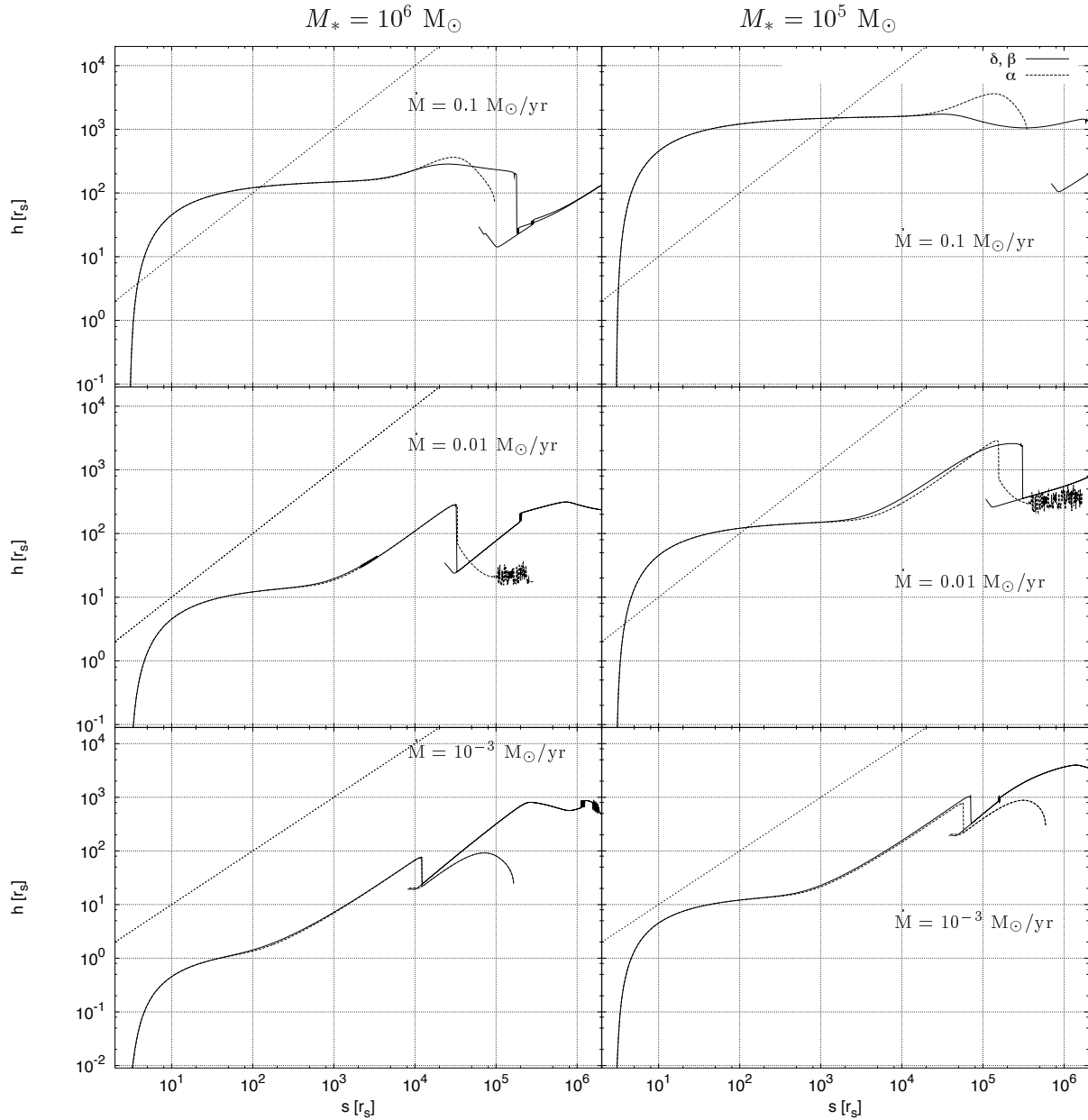


Abbildung 4.12: Die halbe Scheibendicke als Funktion des Radius für Zentralmassen von  $10^6$  und  $10^5$  Sonnenmassen und Akkretionsraten von  $10^{-1} \dots 10^{-3} M_\odot$  pro Jahr. Aufgetragen sind die Kurven für eine  $\beta$ -Scheibe im dissipationsbegrenzten Limes ( $\beta = 10^{-5}$ ) und eine  $\alpha$ -Scheibe ( $\alpha = 0.1$ ). Die Winkelhalbierende  $h/s$  zeigt an, wo die Scheibe dick bzw. dünn ist.

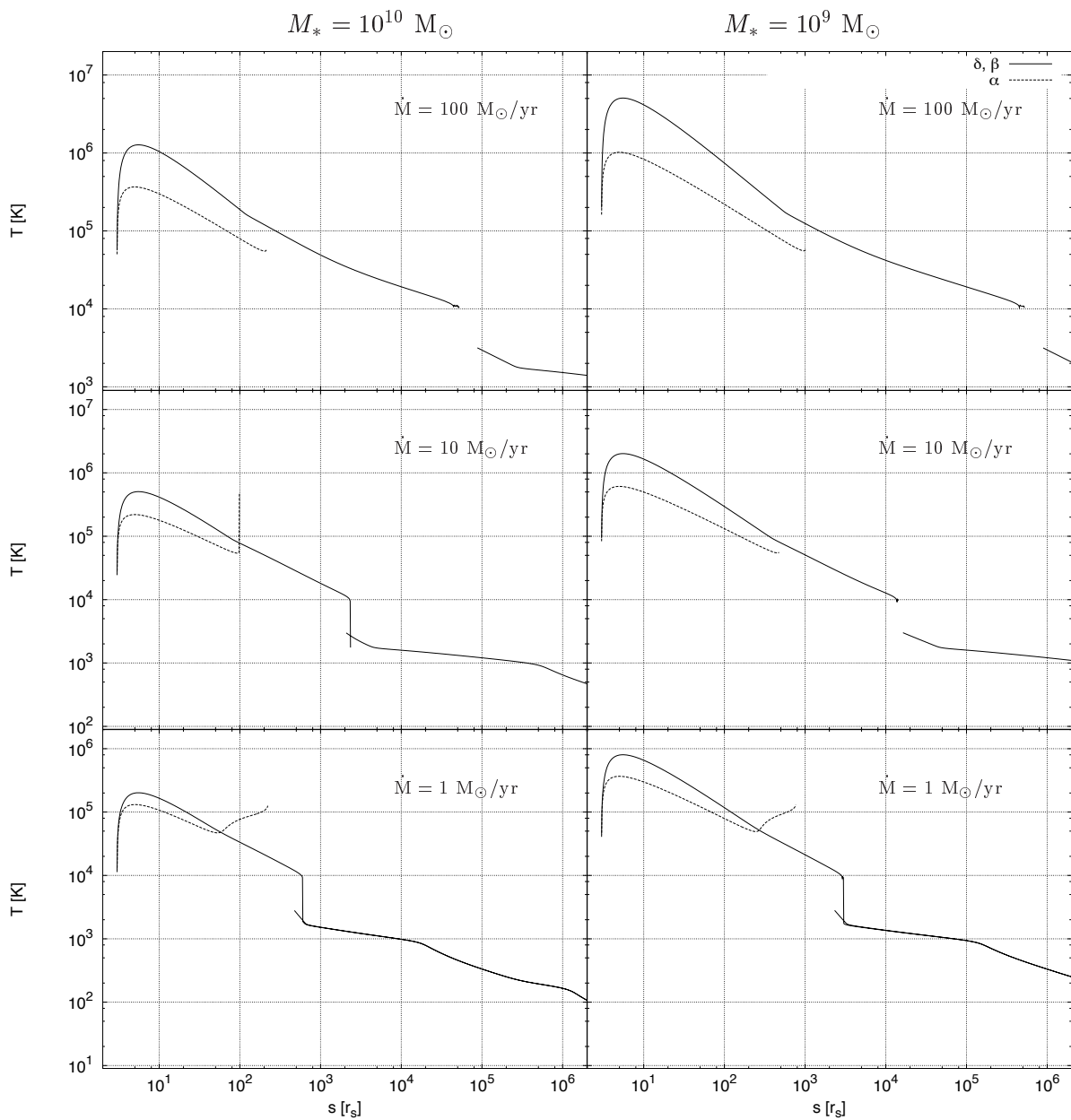


Abbildung 4.13: Die Temperatur als Funktion des Radius für Zentralmassen von  $10^{10}$  und  $10^9$  Sonnenmassen und Akkretionsraten von  $10^2 \dots 1 M_\odot$  pro Jahr. Aufgetragen sind die Kurven für eine  $\beta$ -Scheibe im dissipationsbegrenzten Limes ( $\beta = 10^{-5}$ ) und eine  $\alpha$ -Scheibe ( $\alpha = 0.1$ ).



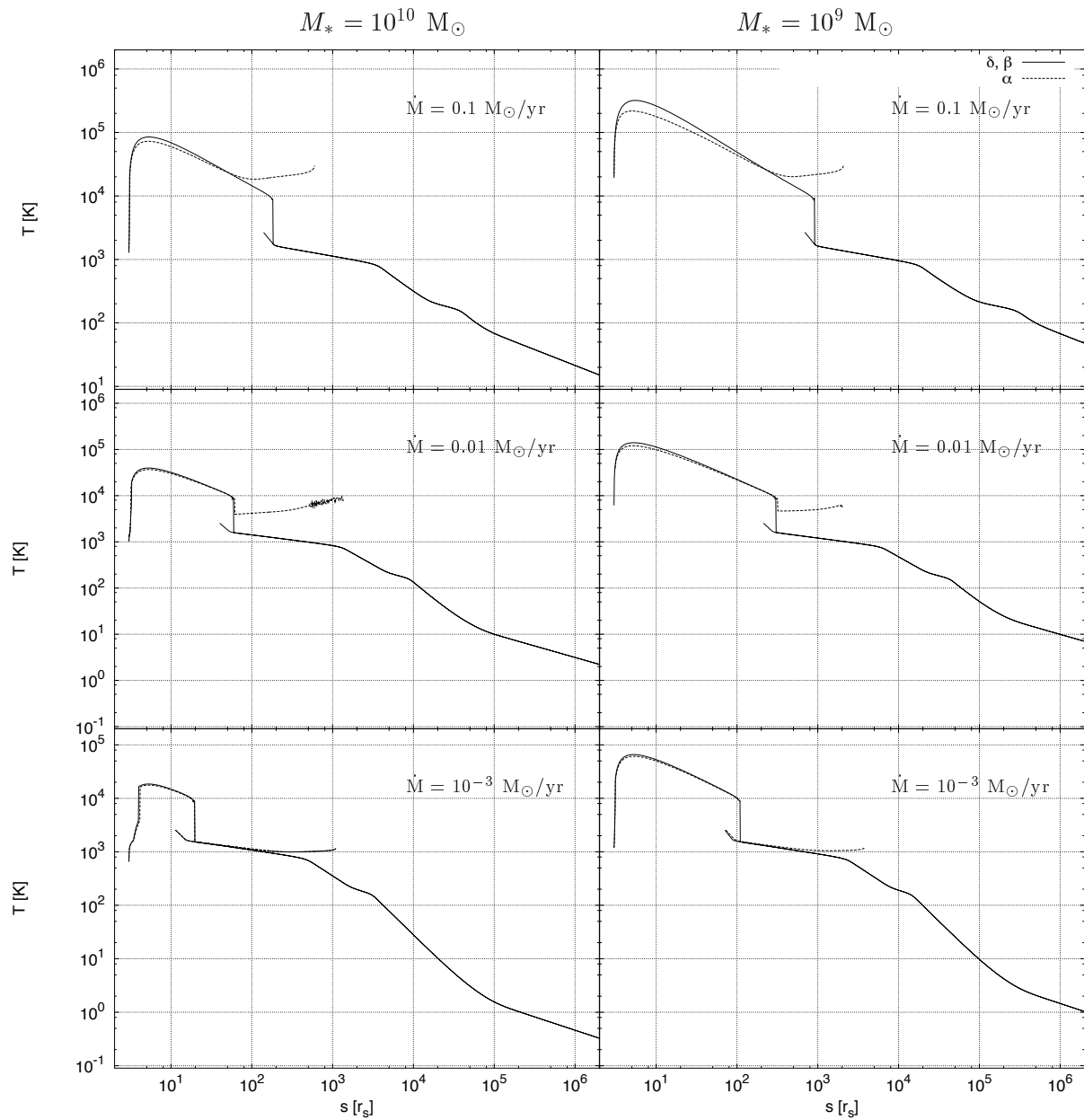


Abbildung 4.14: Die Temperatur als Funktion des Radius für Zentralmassen von  $10^{10}$  und  $10^9$  Sonnenmassen und Akkretionsraten von  $10^{-1} \dots 10^{-3} M_\odot$  pro Jahr. Aufgetragen sind die Kurven für eine  $\beta$ -Scheibe im dissipationsbegrenzten Limes ( $\beta = 10^{-5}$ ) und eine  $\alpha$ -Scheibe ( $\alpha = 0.1$ ).

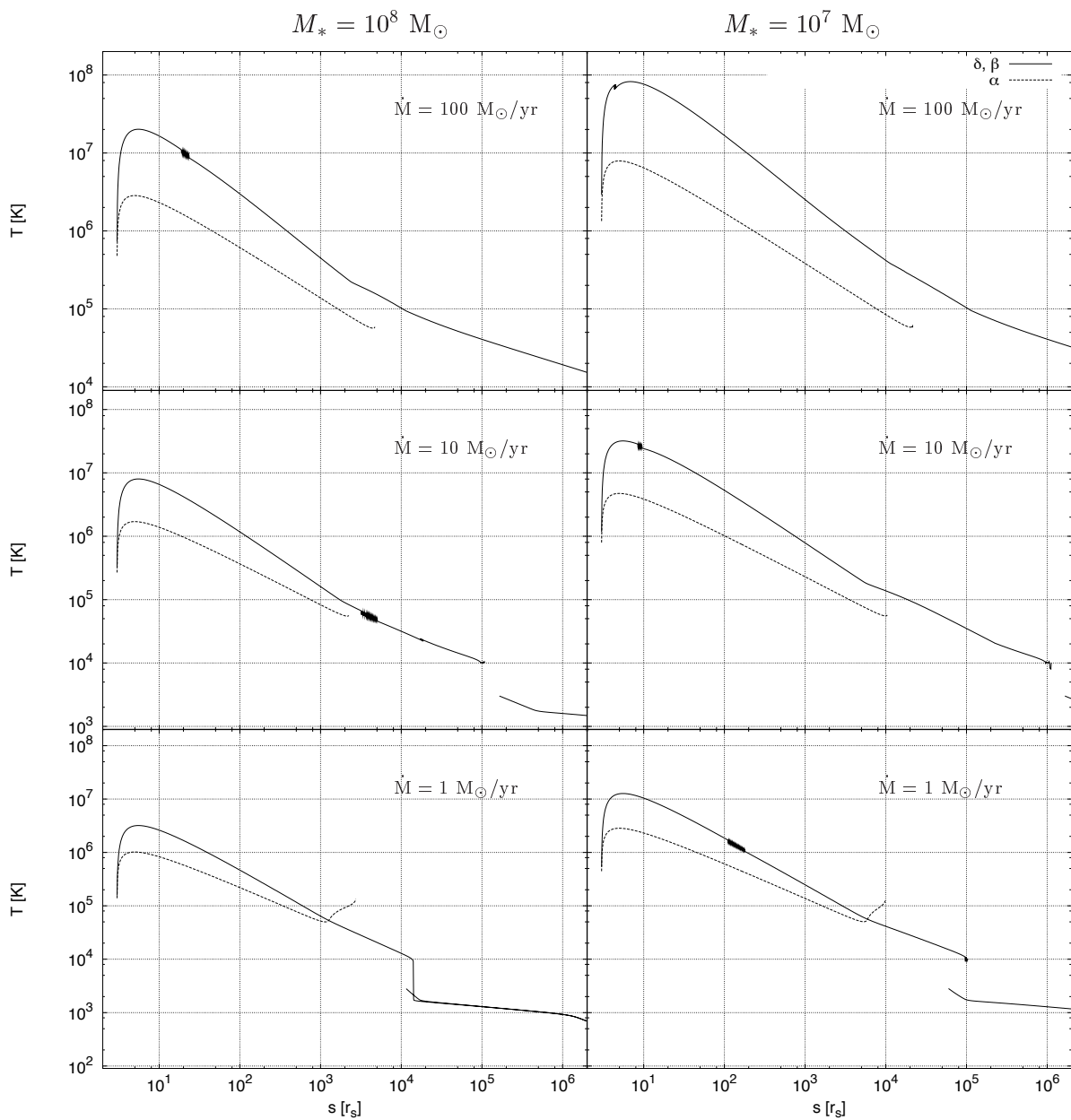


Abbildung 4.15: Die Temperatur als Funktion des Radius für Zentralmassen von  $10^8$  und  $10^7$  Sonnenmassen und Akkretionsraten von  $10^2 \dots 1 M_\odot$  pro Jahr. Aufgetragen sind die Kurven für eine  $\beta$ -Scheibe im dissipationbegrenzten Limes ( $\beta = 10^{-5}$ ) und eine  $\alpha$ -Scheibe ( $\alpha = 0.1$ ).

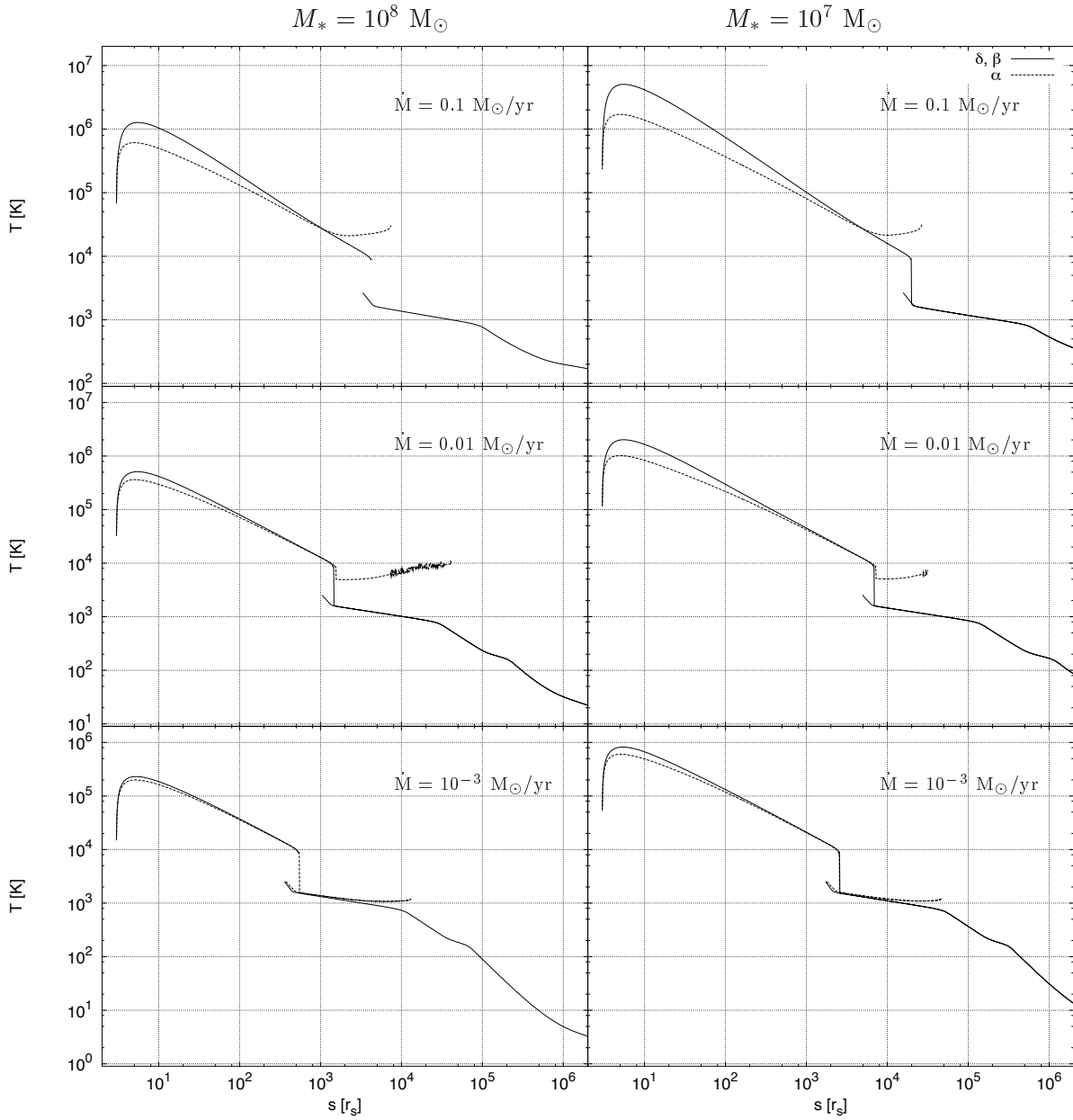


Abbildung 4.16: Die Temperatur als Funktion des Radius für Zentralmassen von  $10^8$  und  $10^7$  Sonnenmassen und Akkretionsraten von  $10^{-1} \dots 10^{-2} M_\odot$  pro Jahr. Aufgetragen sind die Kurven für eine  $\beta$ -Scheibe im dissipationsbegrenzten Limes ( $\beta = 10^{-5}$ ) und eine  $\alpha$ -Scheibe ( $\alpha = 0.1$ ).

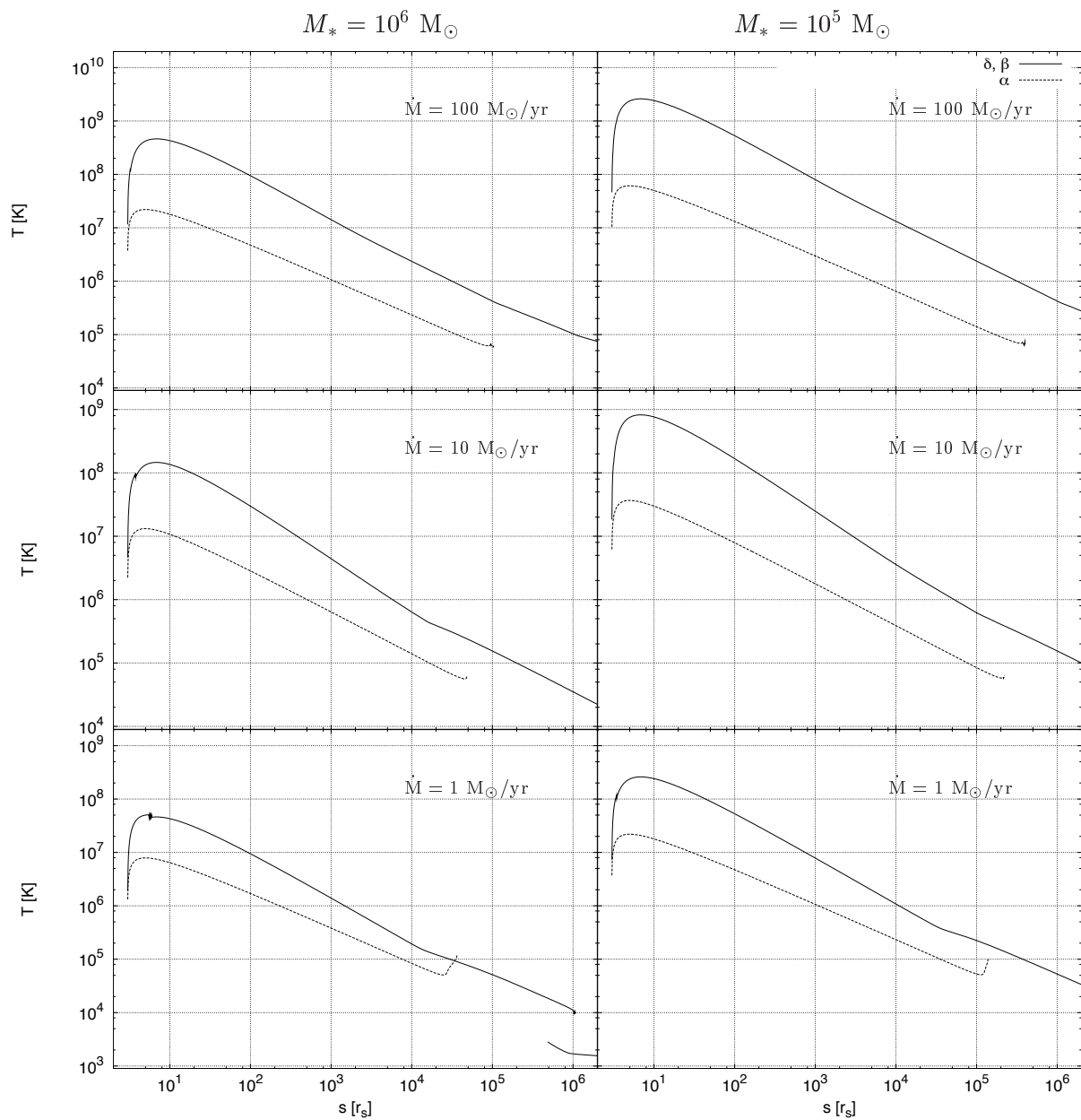


Abbildung 4.17: Die Temperatur als Funktion des Radius für Zentralmassen von  $10^6$  und  $10^5$  Sonnenmassen und Akkretionsraten von  $10^2 \dots 1 M_\odot$  pro Jahr. Aufgetragen sind die Kurven für eine  $\beta$ -Scheibe im dissipationsbegrenzten Limes ( $\beta = 10^{-5}$ ) und eine  $\alpha$ -Scheibe ( $\alpha = 0.1$ ).

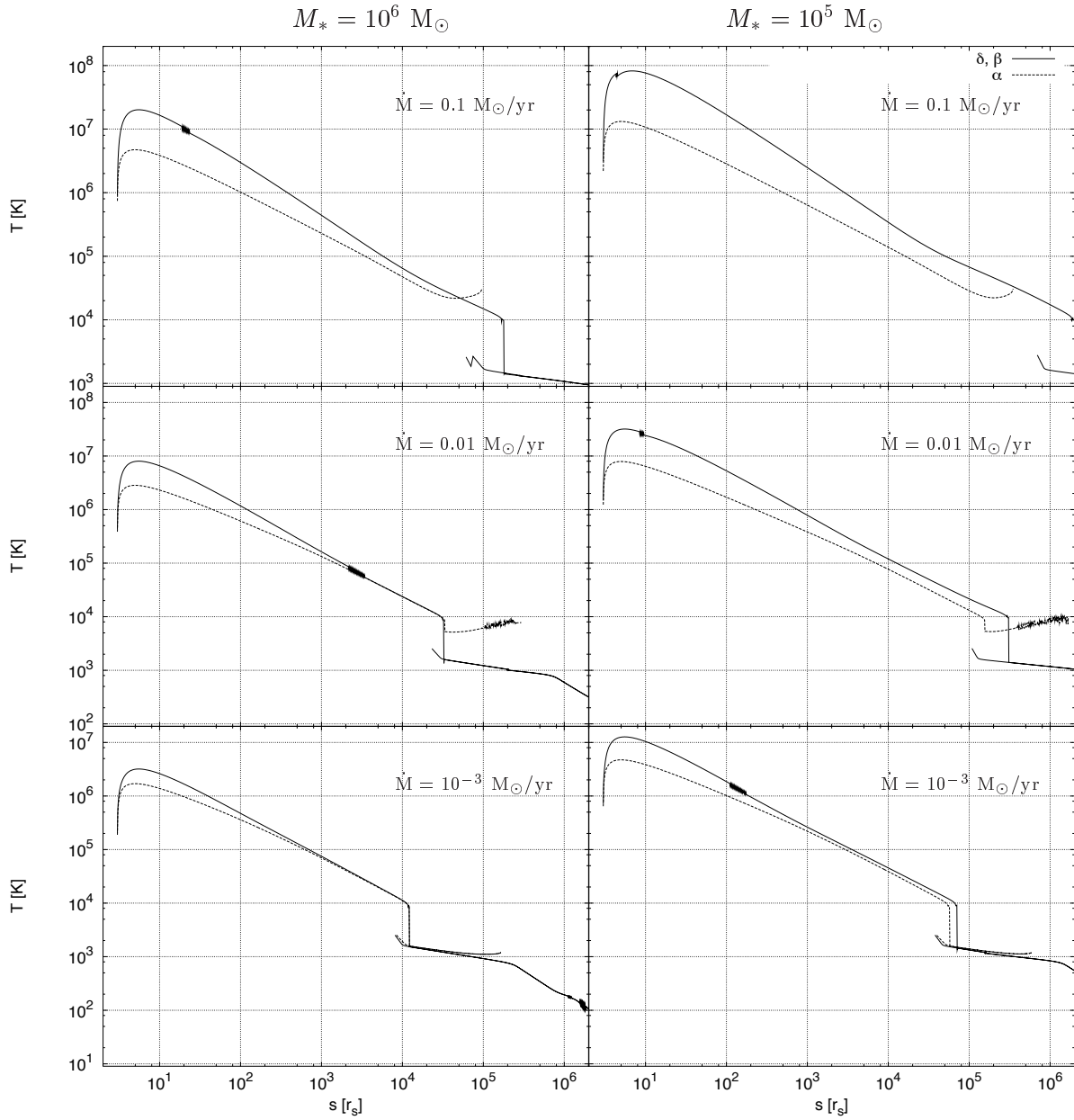


Abbildung 4.18: Die Temperatur als Funktion des Radius für Zentralmassen von  $10^6$  und  $10^5$  Sonnenmassen und Akkretionsraten von  $10^{-1} \dots 10^{-3} M_\odot$  pro Jahr. Aufgetragen sind die Kurven für eine  $\beta$ -Scheibe im dissipationsbegrenzten Limes ( $\beta = 10^{-5}$ ) und eine  $\alpha$ -Scheibe ( $\alpha = 0.1$ ).

Aufgetragen sind jeweils die Lösungen für  $\alpha$ -Scheiben und für  $\beta$ -Scheiben im stoßdissipativen Limit. Das Einsetzen der vertikalen Selbstgravitation resultiert bei hohen Akkretionsraten in einer Abnahme der Scheibenhöhe, wie aus den Abbildungen 4.7, 4.9 und 4.11 zu ersehen. Für  $\dot{M} = 10 \dots 100$  fällt die Scheibendicke um zwei bis sogar drei Größenordnungen. Bei niedrigeren Raten (Abbildungen 4.8, 4.10 und 4.12) und damit weniger massereichen und kühleren Scheiben fällt die Abnahme geringer aus oder tritt gar nicht mehr auf, was etwas überraschend ist, da die Eigengravitation der Scheibe dieselbe in  $z$ -Richtung kontrahieren sollte. Der Grund, warum das nicht geschieht, liegt an der niedrigen Akkretionsrate, die geringere Dichten und Temperaturen nach sich zieht. Dazu kommt der Effekt der Randbedingung, welche die Temperatur auf die "Oberflächentemperatur" des Zentralobjekts, hier also die drei Schwarzschildradien, drückt. Von außen nach innen betrachtet, steigt die Höhe bei niedrigeren Temperaturen nicht mehr an. Die Opazitätsbereiche spielen dabei eine untergeordnete Rolle.

Die Graphen in Abbildungen 4.9 und 4.11 zeigen extrem dicke Scheiben, so dass diese zunächst nicht weiter behandelt werden sollen. Klar erkennbar ist sofort, dass die  $\alpha$ -Scheiben schnell inkonsistent werden, sobald die Scheiben vertikal selbstgravitierend geworden sind. Tatsächlich wird jedoch die schnell steigende Scheibenmasse problematisch. Bei genauerer Betrachtung, werden keine Lösungen mehr gefunden sobald das Verhältnis  $M_d/M_* \simeq 0.1$  erreicht wird. In diesem Bereich steigt bereits  $d \ln \omega / d \ln s$  stark an und resultiert in den in Abschnitt 4.0.7 besprochenen Problemen. Für Scheiben mit Akkretionsraten von  $\dot{M} = 0.1 \dots 0.01$  lassen sich scheinbar FSG-Lösungen finden. Diese konvergieren jedoch nicht mehr, erkennbar am "Gezappel" der Kurven. Das Gleichungssystem kann also nicht zur Konsistenz gelöst werden, auch wenn der Algorithmus nicht gleich abbricht, aufgrund undefinierter Größen im Gleichungssystem (siehe Abschnitt 4.0.7). Ein Schwachpunkt des  $\alpha$ -Ansatzes liegt vor allem in der physikalisch nicht sinnvollen Folge konstanter Temperatur im Bereich vertikaler Selbstgravitation, wie Duschl et al. [2000] zeigen konnten. Die Konstanz der Temperatur ist bei den hier gerechneten Scheiben jedoch nicht zu sehen, da der Strahlungsdruck die Zustandsgleichung dominiert. Nichtsdestotrotz ist dies ein Grund, warum nach Alternativen für die  $\alpha$ -Parametrisierung gesucht wird.

Weiter sind immer wieder Hysteresekurven zu sehen, hervorgerufen durch eine thermische Instabilität, auf die im nächsten Abschnitt näher eingegangen werden soll. Die Erzeugung dieser Kurven ist in Abschnitt 3.3.1 beschrieben. Weitere Sprünge bzw. Doppellösungen treten auf, wenn ein Wechsel zwischen den Viskositätsparametrisierungen stattfindet. Auch passiert es häufig, dass durch den Sprung der Temperatur von 10000 K auf 1000 K die Turbulenzgeschwindigkeit plötzlich überschallschnell wird. So ist anzunehmen, dass dieses "Umschalten" der Viskosität von starker Dissipation (und damit erneuter Aufheizung) begleitet wird, was in zeitabhängigen Rechnungen zu untersuchen bleibt.

Betrachtet man Tabelle 4.1 eingehender, fällt auf, dass sich in einem bestimmten Parameterbereich radiale Selbstgravitation unabhängig von der Zentralmasse einstellt. Dieses Phänomen gilt nur für  $\beta$ -Scheiben, was der Vergleich mit nebenstehender Tabelle verdeutlicht. Eingetragen sind für die Parameter Zentralmasse und Akkretionsrate die jeweils im betrachteten radialen Bereich ( $10 \dots 10^6 r_s$ ) vorherrschende Viskosität. Das heisst jedoch nicht, dass alle  $\beta$ -Scheiben in der gleichen Entfernung vom Schwarzen Loch FSG werden! Aufgetragen ist nämlich über die Schwarzschildradien, welche ihrerseits linear in  $M_*$  gehen (2.62). Sei  $r$  der Radius in cm, wird die  $\beta$ -Scheibe wieder durch (3.3) bestimmt ( $\omega' \propto \omega/s$ ):

$$\Sigma = \frac{\dot{M}f}{2\pi\bar{\omega}'\nu_\beta} \propto \frac{\dot{M}}{\omega s^2} \xrightarrow{\text{FSG}} \Sigma \propto \dot{M}^{2/3} r^{-1} \propto \dot{M}^{2/3} s^{-1} M_*^{-1} \quad (4.2)$$

Damit geht die relative Scheibenmasse wie

$$\frac{M_d}{M_*} \propto \frac{\Sigma r^2}{M_*} \propto \dot{M}^{2/3} s \quad (4.3)$$

Vorsicht geboten ist bei den Werten von kleinen Zentralmassen bei hohen Akkretionsraten. Wie anhand der Abbildungen 4.9 und 4.11 zu sehen, sind diese Scheiben extrem dick und machen als Lösungen des verwendeten Gleichungssystems keinen Sinn. Dies soll demonstrieren, dass formal auch Parameterkombinationen zu konvergenten Lösungen führen können, auch wenn sie physikalisch nicht sinnvoll sind, was daran liegt, dass die verwendeten Näherungen (Kapitel 2) keine Gültigkeit besitzen! Desweiteren sind bei dicken Scheiben andere Effekte zu berücksichtigen, wie zum Beispiel Advektion, vertikale Diffusion, usw. Als weiteren Effekt schirmt der dicke oder gar sphärische Bereich die äußeren Regionen vor Strahlung aus der Zentralregion ab, was zwar nicht in dieser, jedoch in folgenden Arbeiten bedeutsam sein kann. Auch diese Scheiben werden in den äußeren Bereichen wieder dünn. Obwohl diese Lösungen an jedem Radius einzeln berechnet werden und im Rahmen der Näherungen physikalisch konsistent sind, besteht eine radiale Kopplung über die Scheibenmasse, die von  $\Sigma$  abhängt. Mit Wegfall der Näherung dünner Scheiben, fällt die 1-Zonen-Näherung für das hydrostatische Gleichgewicht. Darüberhinaus ist vertikaler Materietransport nicht auszuschließen, sowie die Möglichkeit, dass im Innern freigesetzte Strahlung nicht entweichen kann. Es ist also eher unwahrscheinlich, dass die Flächendichte davon unbeeinflusst bleibt, auf jeden Fall für  $\alpha$ - und  $\delta$ -Scheiben. Bei reinen  $\beta$ -Scheiben koppelt die Thermodynamik nicht an die Flächendichte, so dass dort die Scheibenmasse korrekt aufsummiert werden dürfte. Der wesentlichste Unterschied zwischen  $\alpha$ - (bzw.  $\delta$ -) Scheiben und  $\beta$ -Scheiben ist die Tatsache, dass bei Ersteren über die Viskosität die Thermodynamik an die Flächendichte koppelt und bei Letzteren nicht. Über Gleichungen (3.1) und (3.3) hängt  $\Sigma$  an jedem Radius nur von der Viskosität und den Parametern wie Zentralmasse und Massenakkretion ab. Während die  $\beta$ -Viskosität über die Winkelgeschwindigkeit von der Massenverteilung abhängt ( $M_*$  und  $\Sigma$ ), kommt in der  $\alpha$ - und damit auch in der  $\delta$ -Parametrisierung mit der Schallgeschwindigkeit die Hydrostatik ins Spiel,

		$M_*$					
		$10^{10}$	$10^9$	$10^8$	$10^7$	$10^6$	$10^5$
$\dot{M}$	100	$\delta$	$\delta$	$\beta$	$\beta$	$\beta$	$\beta$
	10	$\delta$	$\delta$	$\delta$	$\beta$	$\beta$	$\beta$
	1	$\delta$	$\delta$	$\delta$	$\beta$	$\beta$	$\beta$
	0.1	$\delta$	$\delta$	$\delta$	$\delta$	$\beta$	$\beta$
	$10^{-2}$	$\delta$	$\delta$	$\delta$	$\delta$	$\beta$	$\beta$
	$10^{-3}$	$\delta$	$\delta$	$\delta$	$\delta$	$\delta$	$\beta$

Tabelle 4.2: Jeweils die über weite Bereiche dominante Viskosität für die Parameter  $M_*$  und  $\dot{M}$ .

sowie der Strahlungstransport. Daraus resultiert eine Abhängigkeit der Flächendichte von der Opazität. Daher ist es durchaus wichtig, eine gute Approximation der Opazität zu wählen.

Interessant ist sicherlich das Verhalten der Flächendichte im FSG-Fall und, mehr noch, das der Winkelgeschwindigkeit, welches sofort auf die Rotationskurve der Akkretionsscheibe führt (siehe Duschl et al. [2000]). (3.3) eingesetzt in (3.4) führt auf

$$\frac{3}{2}\Sigma^2\kappa\nu\omega^2\frac{\dot{M}^2}{4\pi^2\Sigma^2\nu^2}=4\sigma T$$

mit (3.1) ergibt

$$\begin{aligned}\frac{3}{8}\kappa\frac{\pi G\Sigma}{s}\frac{\dot{M}^2}{\pi^2\nu}&=4\sigma T \\ \Sigma &= \frac{32\sigma\pi T^4 s}{3G\dot{M}\kappa}\nu\end{aligned}\quad (4.4)$$

Nun folgt für  $\nu_\delta$  (2.77) und (3.1)

$$\Sigma \propto \frac{s^{3/2}c_s^2T^4}{\kappa\sqrt{\Sigma}}\quad (4.5)$$

In den Außenregionen der Scheibe, die hier interessieren, dominiert die Opazität von Eis, d.h.  $\kappa \propto T^2$  (Tab. 3.1). So geht die Flächendichte

$$\Sigma \propto sT^2\quad (4.6)$$

(2.77) in der Drehimpulserhaltung (3.3) führt auf:

$$\begin{aligned}|\bar{\omega}'| &= \frac{\dot{M}f}{2\pi\Sigma}\frac{2\omega|\bar{\omega}'|}{3\alpha c_s^2} \\ \Sigma &= \frac{\omega\dot{M}}{3\pi\alpha c_s^2} \propto \frac{\omega}{c_s^2} \propto \frac{\sqrt{\Sigma}}{\sqrt{s}c_s^2}\end{aligned}$$

und somit

$$\Sigma \propto s^{-1}T^{-2}\quad (4.7)$$

Aus (4.6) und (4.7) folgt:

$$\Sigma = \text{const}\quad (4.8)$$

und dabei noch  $T \propto 1/\sqrt{s}$ . Für  $\beta$ -Scheiben ergibt sich aus (3.3) unabhängig von der Opazität:

$$\Sigma = -\frac{\dot{M}}{2\pi\omega'\beta\omega s^2} \propto \frac{1}{\omega s^2} \propto \Sigma^{-1/2}s^{-3/2}\quad (4.9)$$

und damit

$$\Sigma \propto 1/s\quad (4.10)$$



Das Gravitationspotential und damit die Winkelgeschwindigkeit wird für FSG- Scheiben von der Scheibenmasse dominiert. In der Näherung  $M_d = \pi \Sigma s^2$  ist

$$\begin{aligned}
\omega &= \sqrt{\frac{G\pi\Sigma}{s}} \\
\bar{\omega}' &= \frac{s}{\omega} \frac{d\omega}{ds} = \frac{s}{2\omega^2} \left( -\frac{G\pi\Sigma}{s^2} + \frac{G\pi\Sigma'}{s} \right) \\
&= -\frac{1}{2} + \frac{G\pi\Sigma' s}{2G\pi\Sigma} \\
\bar{\omega}' &= -\frac{1}{2} + \frac{\bar{\Sigma}'}{2}, \text{ mit } \bar{\Sigma}' = \frac{d \ln \Sigma}{d \ln s}
\end{aligned} \tag{4.11}$$

Für die beobachteten Proportionalitäten der Flächendichte ergeben sich folgende Abhängigkeiten der Winkelgeschwindigkeit, wie sie sich auch im Modell wiederfinden.

$$\beta\text{-Viskosität:} \quad \bar{\Sigma}' = -1 \quad \rightarrow \bar{\omega}' = -1 \tag{4.12}$$

$$\delta\text{-Viskosität:} \quad \bar{\Sigma}' = 0 \quad \rightarrow \bar{\omega}' = -1/2 \tag{4.13}$$

Interessant ist vor allem das Verhalten einer reinen  $\beta$ -Scheibe.  $\bar{\omega}' = -1$  bedeutet nichts anderes als  $v_\phi = \text{const.}$  Betrachtet man die Rotationskurven (Abbildungen 4.21 und 4.22), stellt man fest, dass sie flach oder gar ansteigend verlaufen. Es drängt sich zwar der Vergleich mit den beobachteten galaktischen Rotationskurven auf. Für Akkretionsscheiben ist dies sicher das Resultat turbulenter Strömung in Gas-, Staub- oder Eisscheiben. Inwieweit sich das auf Scheiben aus Sternen und interstellarem dünne Gas übertragen lässt, ist eine sicherlich interessante Frage. (Duschl et al. [2000])

### 4.0.3 $H^-$ -Instabilität

Wie bereits erwähnt, tritt bei den meisten Scheiben eine Instabilität auf, die sich durch Sprünge in Höhe, Dichte, Temperatur und, sofern die maßgebliche Viskosität nicht die  $\beta$ -Viskosität ist, in der Flächendichte. Dieser Sprung hat seine Ursache in einem starken Abfall der Opazität um mehrere Größenordnungen, wenn die  $H^-$ -Absorption einsetzt. In diesem Intervall fällt die Temperatur (immer von inneren Radien nach außen betrachtet) von 10000 K auf unter 2000 K ab (siehe auch Abb. 3.3.2). Die Höhe kann hierbei um bis zu drei Größenordnungen fallen, während die Dichte entsprechend zunimmt. Die Instabilität erkennt man an der Zweideutigkeit der Lösungen an dieser Stelle ("Hystereseurve"). Letztendlich müssten korrekterweise zeitabhängige Rechnungen diese Instabilität bestätigen. So greift auch das entsprechende Kriterium (2.91) nicht, da bereits die Annahme in das dünne Scheibenmodell gesteckt wurde, dass die viskose Heizung gerade durch die Strahlung kompensiert wird ( $Q^+ = Q^-$ ). Die Änderung der Opazität um mehrere Größenordnungen in einem nur kleinen  $(\rho, T)$ -Intervall sollte aber eine Instabilität nach sich ziehen. Die viskose Stabilität ist nachprüfbar. In Abb. 4.0.3 kann man schön das Verhalten der Temperatur auf Änderung der Flächendichte sehen. Dies ist allerdings nicht die wahre S-Kurve, sondern  $T(\Sigma)$  für alle Radien. Daher sind Mehrfachlösungen zunächst nur ein Indiz für Instabilitäten. So ist untere Doppeldeutigkeit in der Kurve auf die  $H^-$ -Instabilität zurückzuführen, wobei nach Bedingung (2.97) hier auch eine viskose Instabilität vorliegt, und die obere ein Effekt der Randbedingung. In Regionen mit  $\partial T / \partial \Sigma > 0$  folgt aus einem kleinem Anstieg/Abfall in der

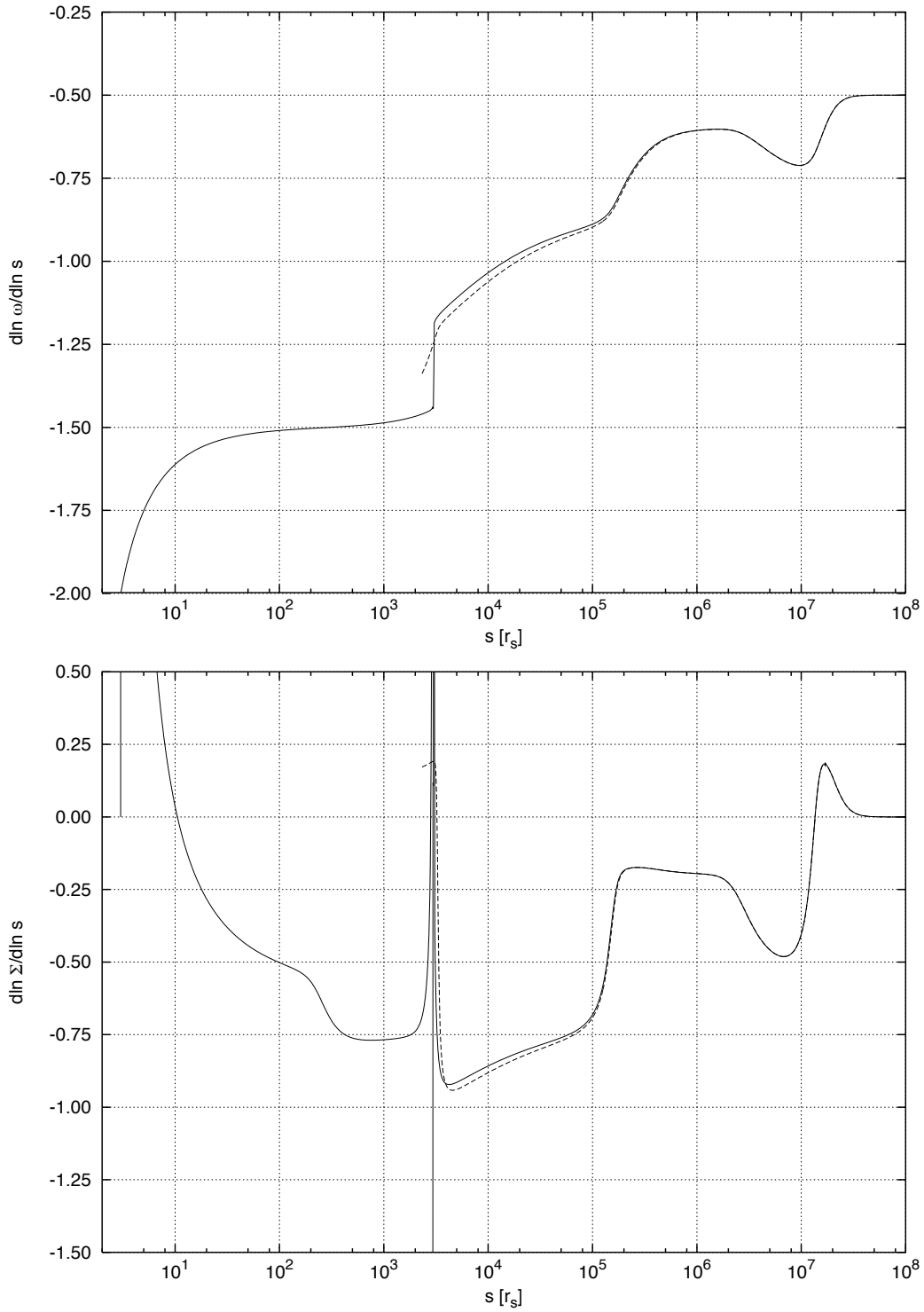


Abbildung 4.19: Die logarithmischen Ableitungen von Flächendichte und Winkelgeschwindigkeit als Funktion des Radius für  $M_* = 10^9 M_{\odot}$  und  $\dot{M} = 1 M_{\odot}/\text{yr}$ . Diese dissipationslimitierte Scheibe wird, sobald  $\text{H}^-$ -Absorption greift, voll selbstgravitierend.

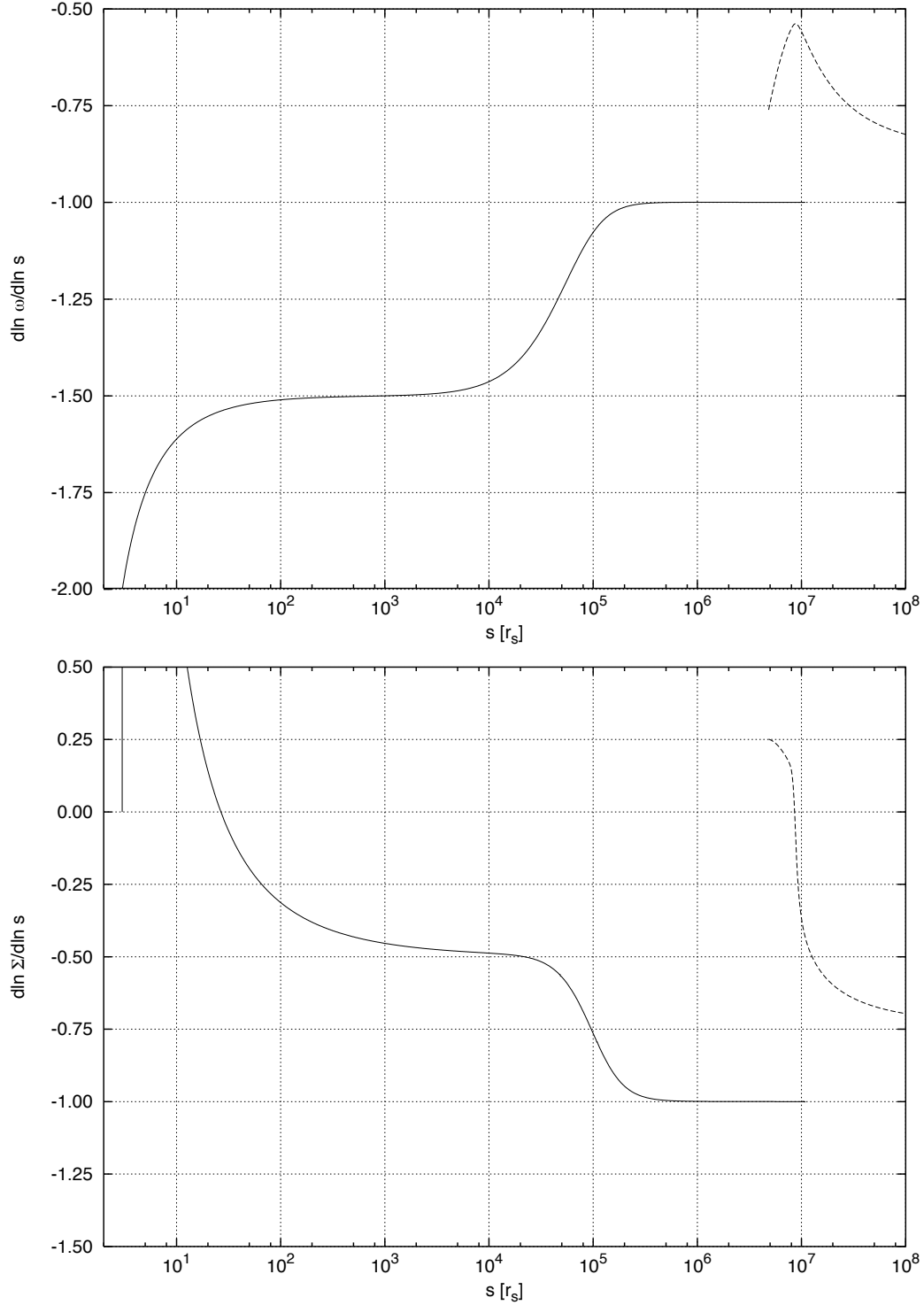


Abbildung 4.20: Die logarithmischen Ableitungen von Flächendichte und Winkelgeschwindigkeit als Funktion des Radius für  $M_* = 10^5 M_\odot$  und  $\dot{M} = 1 M_\odot/\text{yr}$ . Die Scheibe ist bis etwa  $10^7 r_s$   $\beta$ -viskos, danach wird durch den rapiden Temperaturabfall die Schallgeschwindigkeit kleiner als die Turbulenzgeschwindigkeit  $\sqrt{\beta} v_\phi$ .

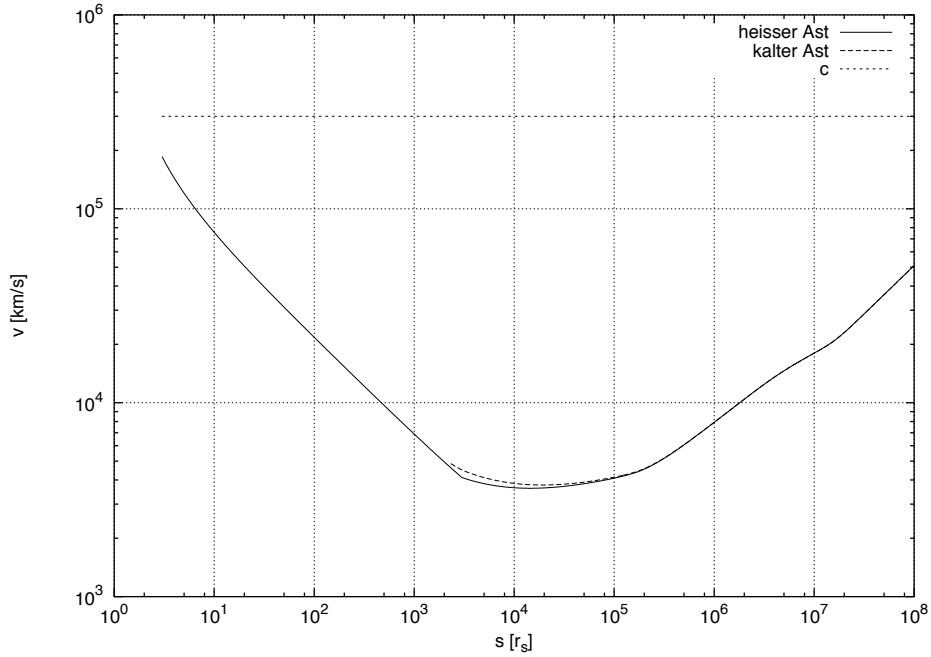


Abbildung 4.21: Die Rotationskurven für  $M_* = 10^9 M_\odot$  ( $\delta$ -Scheibe) mit  $\dot{M} = 1 M_\odot/\text{yr}$ .  $10^8 r_s$  entsprechen 10 kpc.

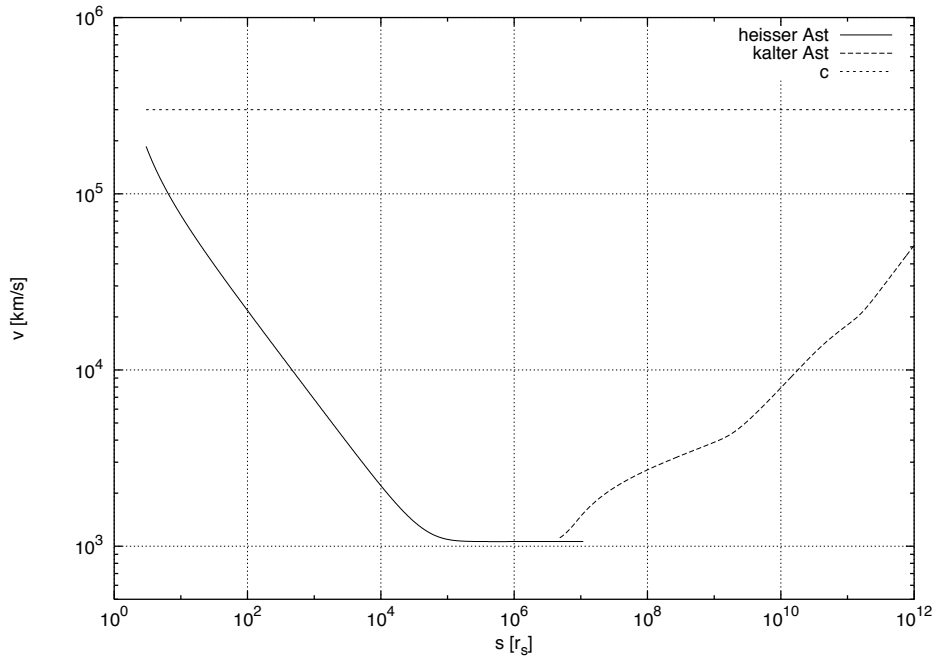


Abbildung 4.22: Die Rotationskurven für  $M_* = 10^5 M_\odot$  (vor Instabilität  $\beta$ -, danach  $\delta$ -Scheibe) mit  $\dot{M} = 1 M_\odot/\text{yr}$ .  $10^{12} r_s$  entsprechen 10 kpc.

Flächendichte eine geringe Temperaturerhöhung/-senkung. Für  $\partial T/\partial \Sigma > 0$  jedoch resultiert eine geringe Änderung von  $\Sigma$  in großen Temperaturänderungen.<sup>1</sup>

Folgendes Scheibenmodell zeigt eine weitere interessante Begebenheit. Der kalte Ast schneidet den heißen, so dass hier eine mehrfache Instabilität vorzuliegen scheint. Tatsächlich ist der Grund hierfür, dass die thermische Instabilität genau in den Übergang von keplerscher zu voller Selbstgravitation fällt. Während also die Flächendichte sprunghaft anwächst, wird die Scheibe spontan FSG. So tritt diese besondere Form der Instabilität bei verschiedensten Parameterkombinationen von  $M_*$  und  $\dot{M}$  auf, jedoch nur bei Scheiben, die zumindest nach der Instabilität eine Lösung im stoßdissipativen Limit haben. Nur ein Sprung in der Flächendichte führt zu so einem rapiden Anstieg der Scheibenmasse.

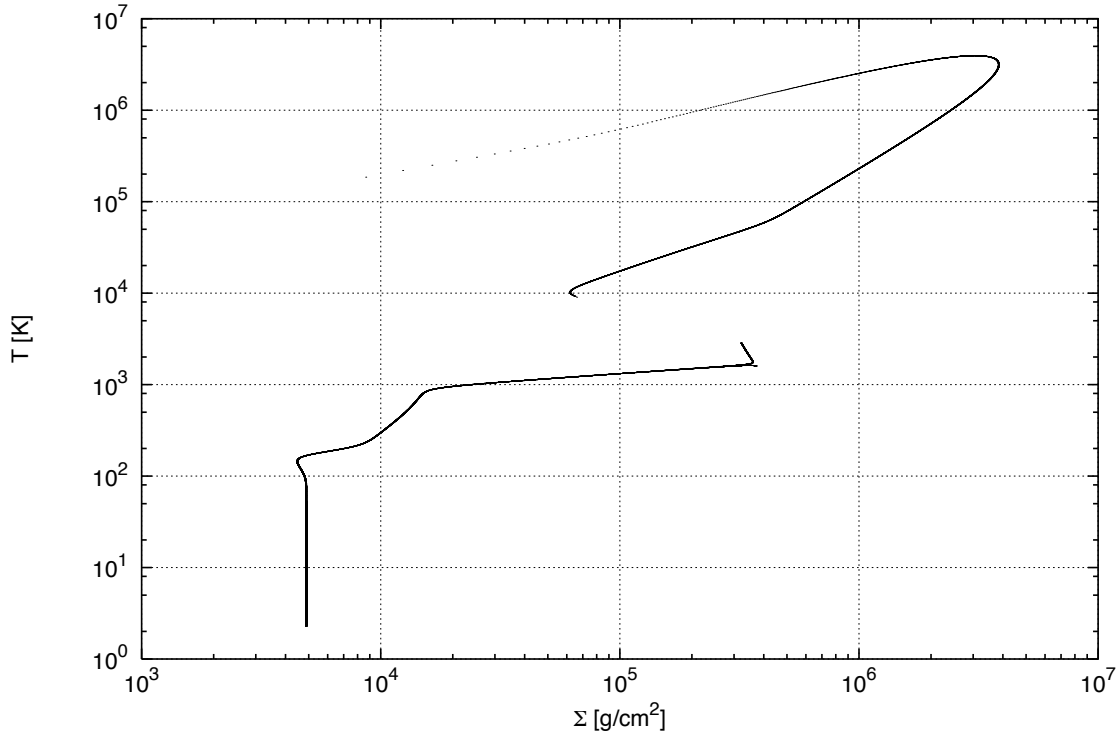


Abbildung 4.23: Temperatur über Flächendichte für  $M_* = 10^8 M_\odot$  und  $\dot{M} = 1.7 M_\odot/\text{yr}$ . Die Daten wurden über *alle* Radien aufgenommen. Deutlich ist viskos-thermische Instabilität zwischen  $10^3$  und  $10^4$  K zu sehen. Die Doppeldeutigkeit bei höheren Temperaturen rührt von der Randbedingung her und ist *keine* Instabilität, da diese an unterschiedlichen Radien liegen.

<sup>1</sup>Es sei noch einmal darauf hingewiesen, dass die Kurven in all den Abbildungen aus zwei *verschiedenen* Lösungen zusammengesetzt sind (siehe 3.3). Der sogenannte “heiße” Ast verläuft vom Innenrand der Scheibe, durchläuft den Sprung, wenn  $\text{H}^-$ -Absorption einsetzt, und geht bis nach außen durch. Der “kalte” Ast, der von außen (bei niedrigeren Temperaturen) kommt, springt erst bei kleineren Radien zu höheren Temperaturen, d.h. zwischen Innenrand und Sprung sind die Lösungen identisch.

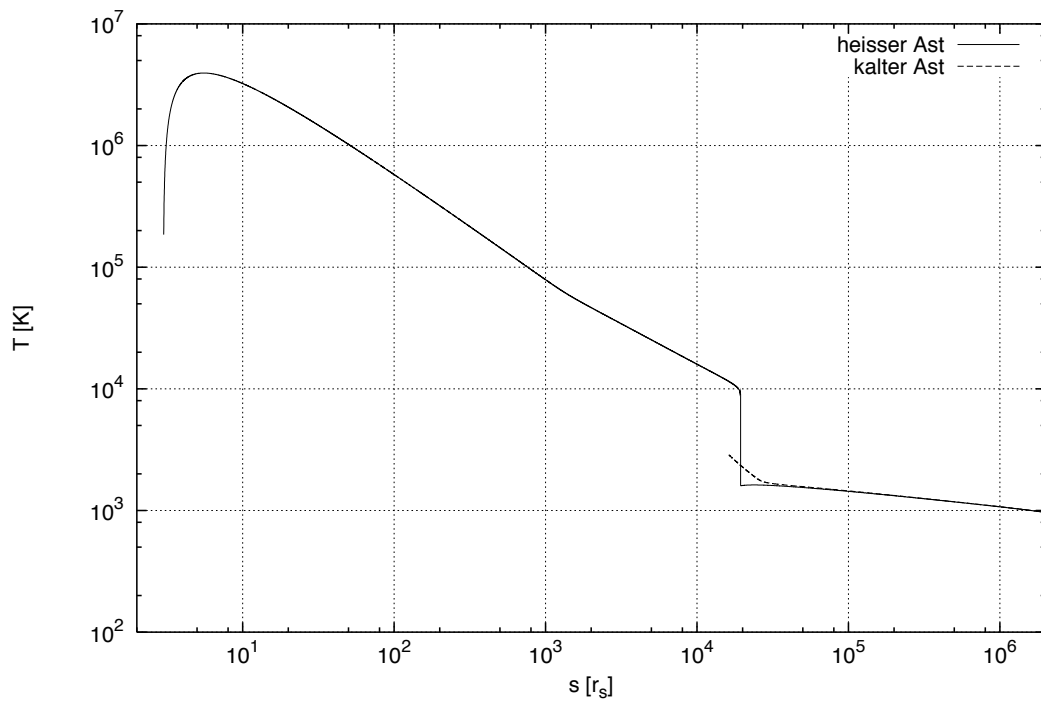
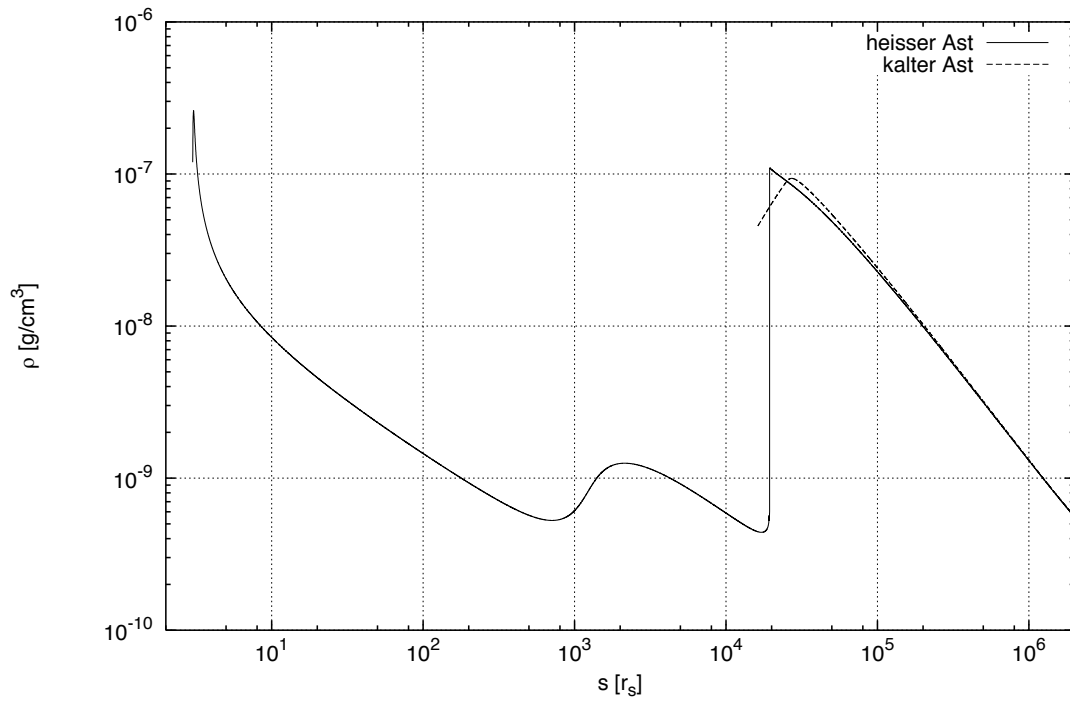


Abbildung 4.24: Dichte und Temperatur als Funktion des Radius für  $M_* = 10^8 M_\odot$  und  $\dot{M} = 1.7 M_\odot/\text{yr}$ .

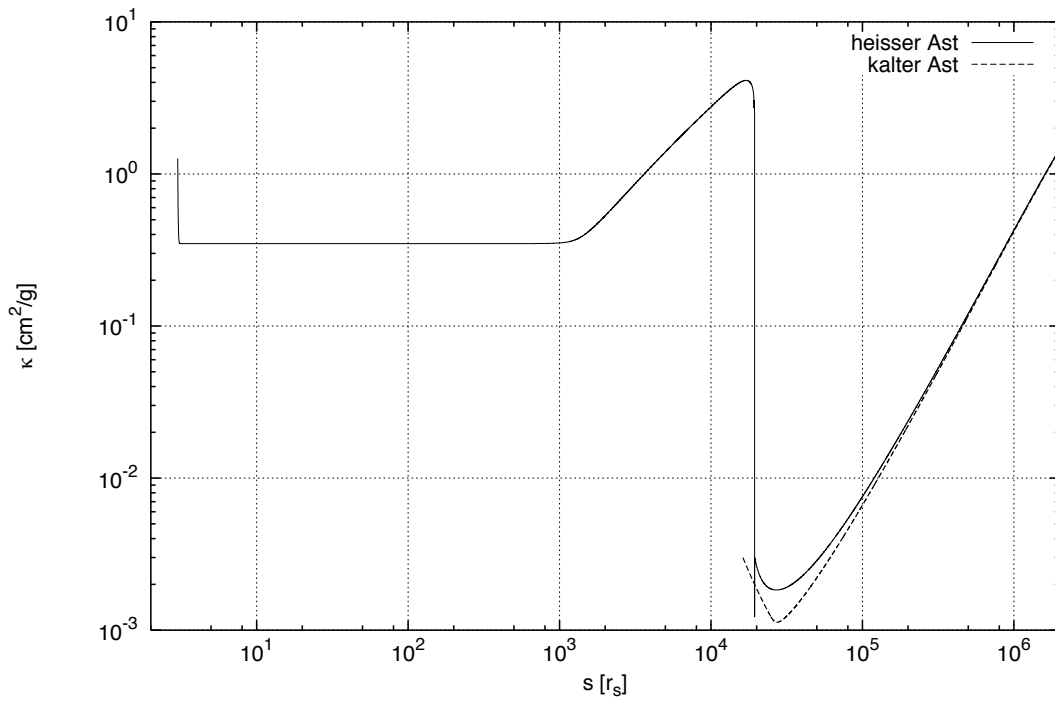
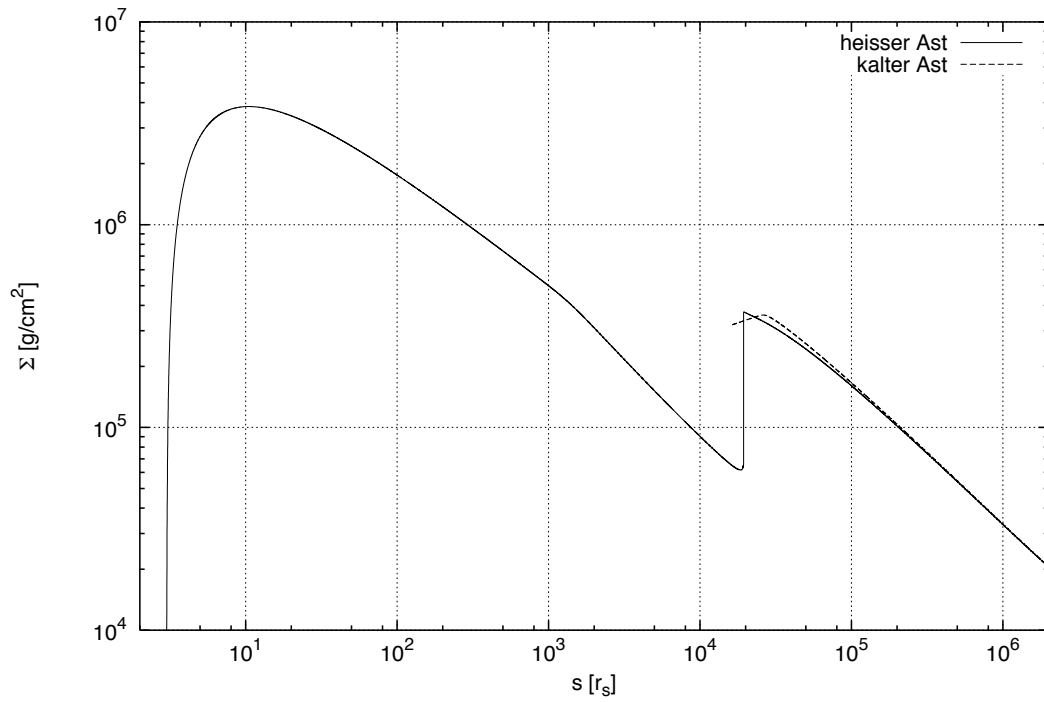


Abbildung 4.25: Flächendichte und Opazität als Funktion des Radius für  $M_* = 10^8 M_\odot$  und  $\dot{M} = 1.7 M_\odot/\text{yr}$ .

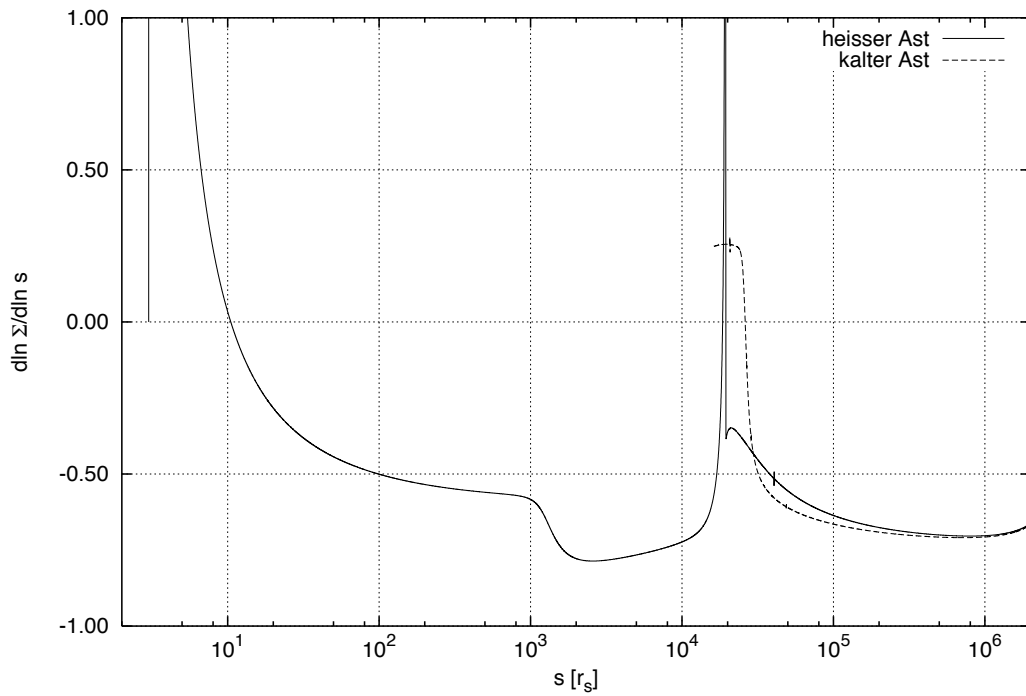
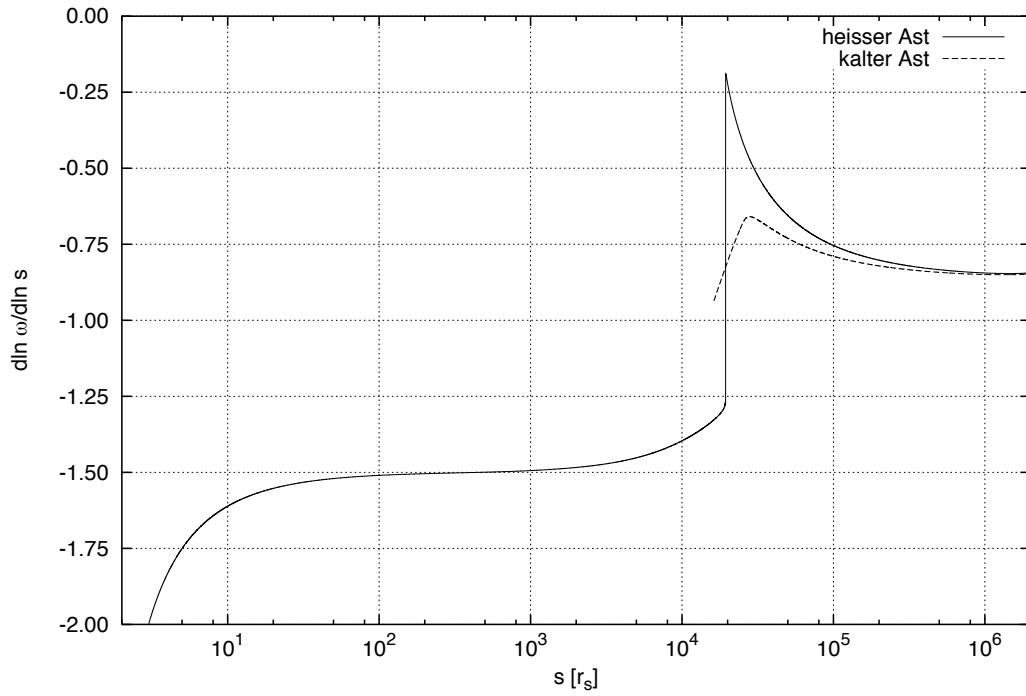


Abbildung 4.26: Die logarithmischen Ableitungen von Flächendichte und Winkelgeschwindigkeit als Funktion des Radius für  $M_* = 10^8 M_\odot$  und  $\dot{M} = 1.7 M_\odot/\text{yr}$ .



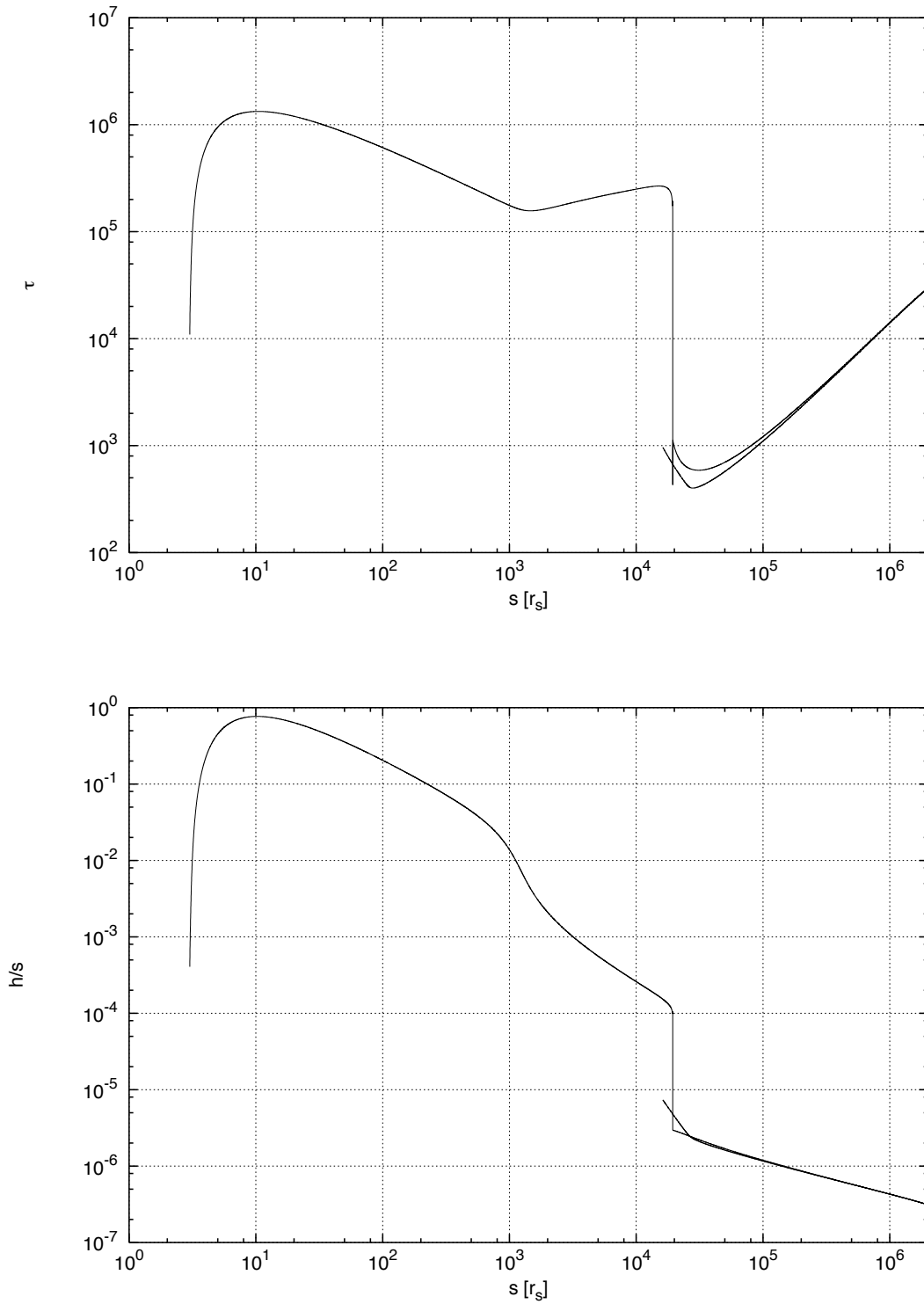


Abbildung 4.27: Optische Dicke und relative halbe Scheibendicke als Funktion des Radius für  $M_* = 10^8 M_{\odot}$  und  $\dot{M} = 1.7 M_{\odot}/\text{yr}$ . Die Scheibe ist also dünn ( $h \ll s$ ) als auch optisch dick.

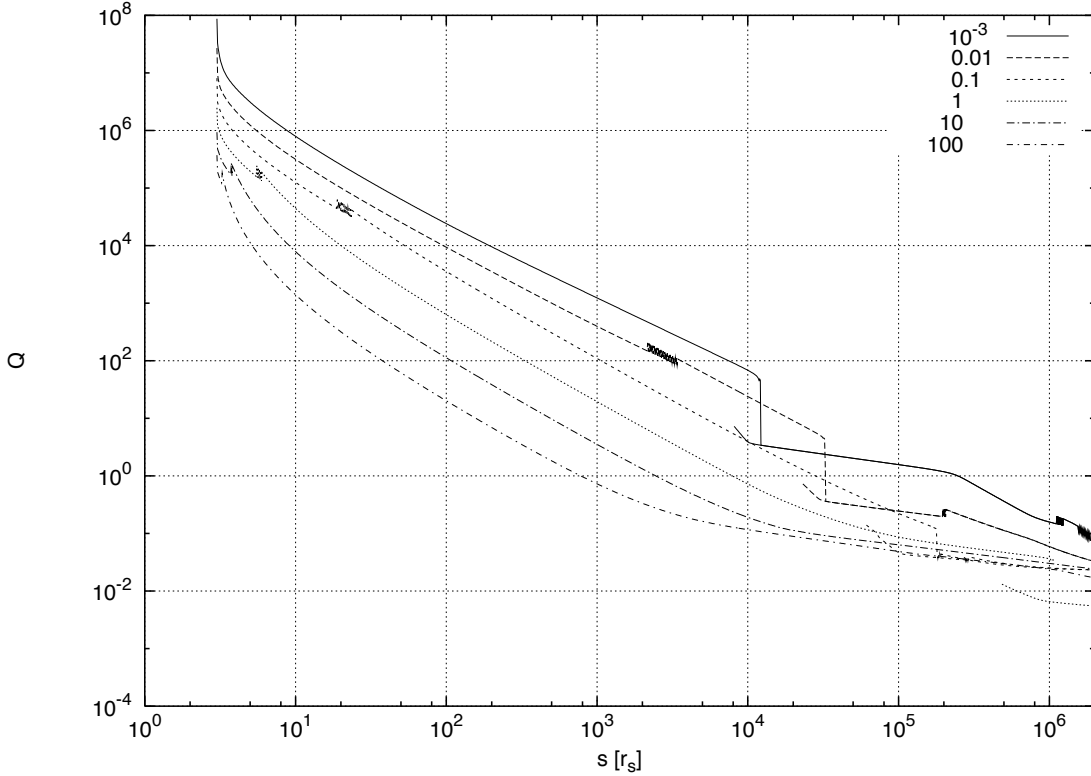


Abbildung 4.28: Der Toomre-Parameter für Scheiben mit Zentralmasse  $M_* = 10^6 M_\odot$  und verschiedenen Akkretionsraten in Einheiten  $[M_\odot/\text{yr}]$ .

#### 4.0.4 Gravitative Stabilität

In Abschnitt 2.4.4 wurde die lokale Stabilität gegenüber achsensymmetrischen Störungen motiviert. Der Toomre-Parameter ist dabei gegeben durch:

$$Q = \frac{\kappa c_s}{\pi G \Sigma} \quad (4.14)$$

mit  $\kappa^2 = 4\omega^2 + 2s\omega \frac{\partial \omega}{\partial s}$

Man kann aus den Abbildungen 4.28 und 4.29 folgende Dinge schließen: Nach dem Stabilitätskriterium von  $Q > 1$  (2.112) werden *alle* Scheiben ab einem bestimmten Radius instabil unter achsensymmetrischen Störungen. Der Vergleich mit Tabelle 4.1 zeigt zunächst keine Korrelation zwischen  $Q$  und den Radien, ab denen die Scheiben KSG bzw. FSG werden. Daher folgt eine grobe Abschätzung, wann die Scheibe stabil ist: Es ist nach (4.14)  $Q \geq 1$ :

$$\begin{aligned} \kappa c_s &\geq \pi G \Sigma && \text{ergibt mit (3.2), } P_r = 0 \\ \omega h \sqrt{\omega^2 + 4\pi g \rho} &\geq 4\pi g \rho && \text{(KSG)} \\ \frac{1}{4}x^2 &\geq x + 1 && \text{mit } x = 2\pi G \rho / \omega^2 \\ x &\geq 4.83 && \end{aligned} \quad (4.15)$$

Die Scheibe ist also stabil, solange die vertikale Selbstgravitation die des Zentralkörpers nicht um das 4,8fache überwiegt! Da der Strahlungsdruck in den meisten Fällen keineswegs zu

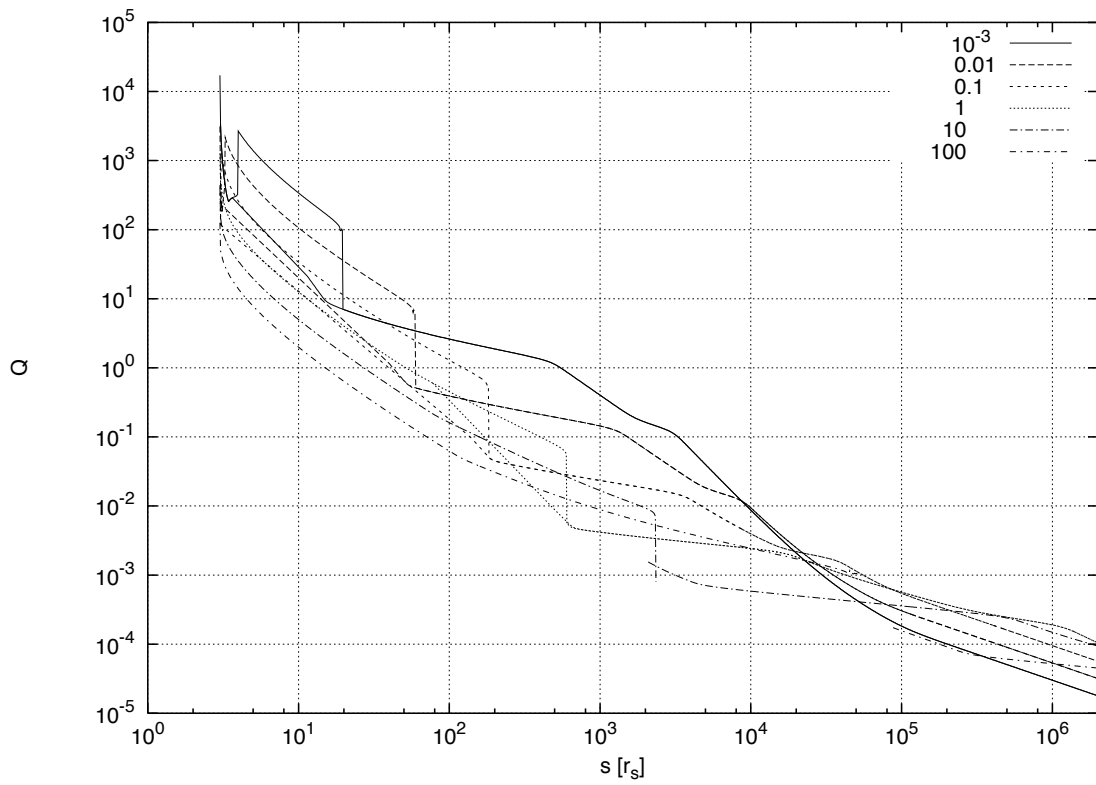


Abbildung 4.29: Der Toomre-Parameter für Scheiben mit Zentralmasse  $M_* = 10^{10} M_\odot$  und verschiedenen Akkretionsraten in Einheiten  $[M_\odot/\text{yr}]$ .

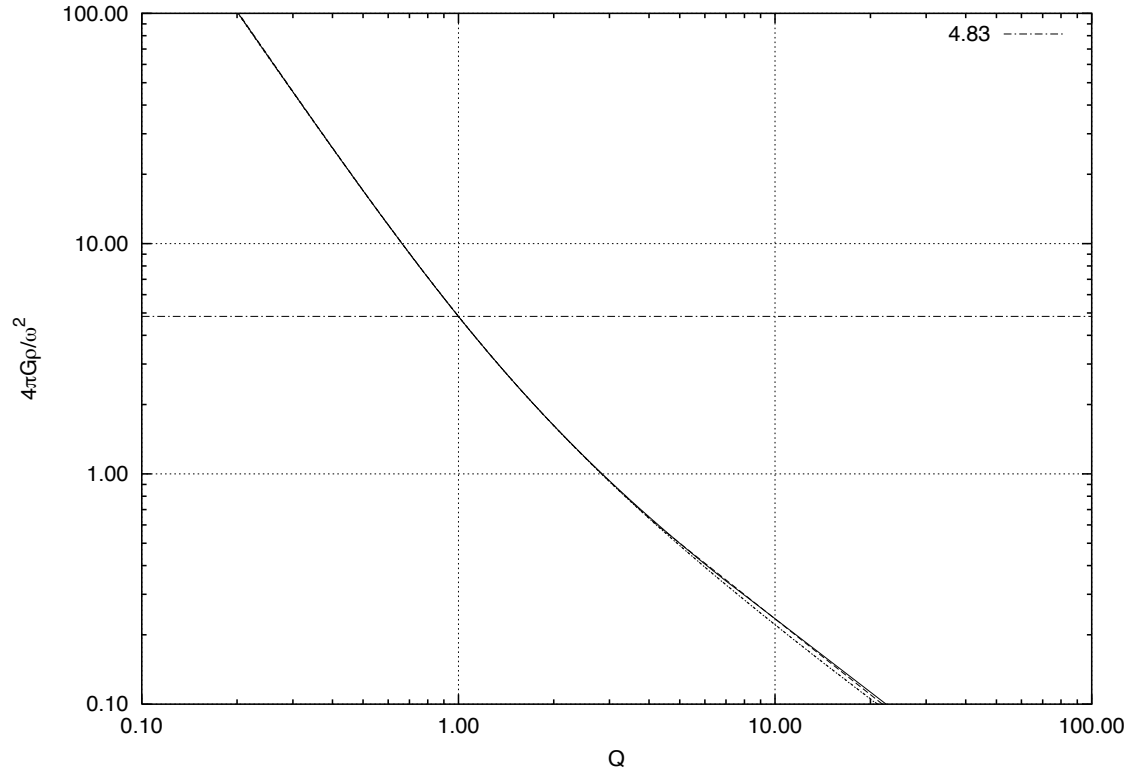


Abbildung 4.30: Verhältnis der gravitativen Terme in der Hydrostatischen Gleichung gegen  $Q$  für  $M_* = 10^{10}$  und  $M_* = 10^9 M_\odot$  mit jeweils Akkretionsraten von  $10^{-3}$  und  $10^{-5} M_\odot/\text{yr}$ .

vernachlässigen ist, gilt dieser Zusammenhang nur bedingt. Über den Strahlungsdruck fließen die Opazität ein und die Temperatur in 4. Potenz. Die Faktoren schwanken dabei zwischen  $10^{-2}$  und einigen 10. Jedenfalls tritt die Instabilität auf, sobald die Scheibe KSG wird, aber noch bevor volle Selbstgravitation einsetzt. Die einzigsten besprochenen Scheiben, für die  $P_r < P_g$  gilt, sind die mit Zentralmassen von  $10^{10}$  und  $10^9 M_\odot$  und Akkretionsraten  $< 0.01 M_\odot/\text{yr}$ . Und tatsächlich bestätigen alle diese Scheibenmodelle obige Relation (Abb. 4.30).

#### 4.0.5 Andere $\alpha$ - und $\beta$ -Werte

Bleibt zu untersuchen, wie sich die Scheibenmodelle verhalten, wenn die beiden Viskositätsparameter  $\alpha$  und  $\beta$  variiert werden. Grundsätzlich geben die Parameter die Effizienz der Viskosität vor, mit der Materie und Drehimpuls transportiert wird. Geringere Effizienz bei gleicher vorgegebener Akkretionsrate führt dabei zu massereicheren Scheiben, also höherer Flächendichte. Folgende Abbildungen veranschaulichen, dass bei Variation dieser Parameter keine grundlegend neue Physik passiert, sondern sich die Kurven verschieben. Größere Werte von  $\beta$  bei gleichem  $\alpha$  würde die Turbulenzgeschwindigkeit im  $\beta$ -Ansatz erhöhen, d.h. sie würde eher noch von der Schallgeschwindigkeit ausgebremst. Bei der Frage, wann Akkretionsscheiben mit  $\beta$ -Viskosität funktionieren können, spielt dabei das Verhältnis  $\alpha/\beta$  eine Rolle und nicht die Absolutwerte. So sind auch Scheiben mit  $\beta = 10^{-3}$  möglich, allerdings immer, wenn ein relativ leichtes Zentralobjekt von einer massiven Scheibe gespeist wird.

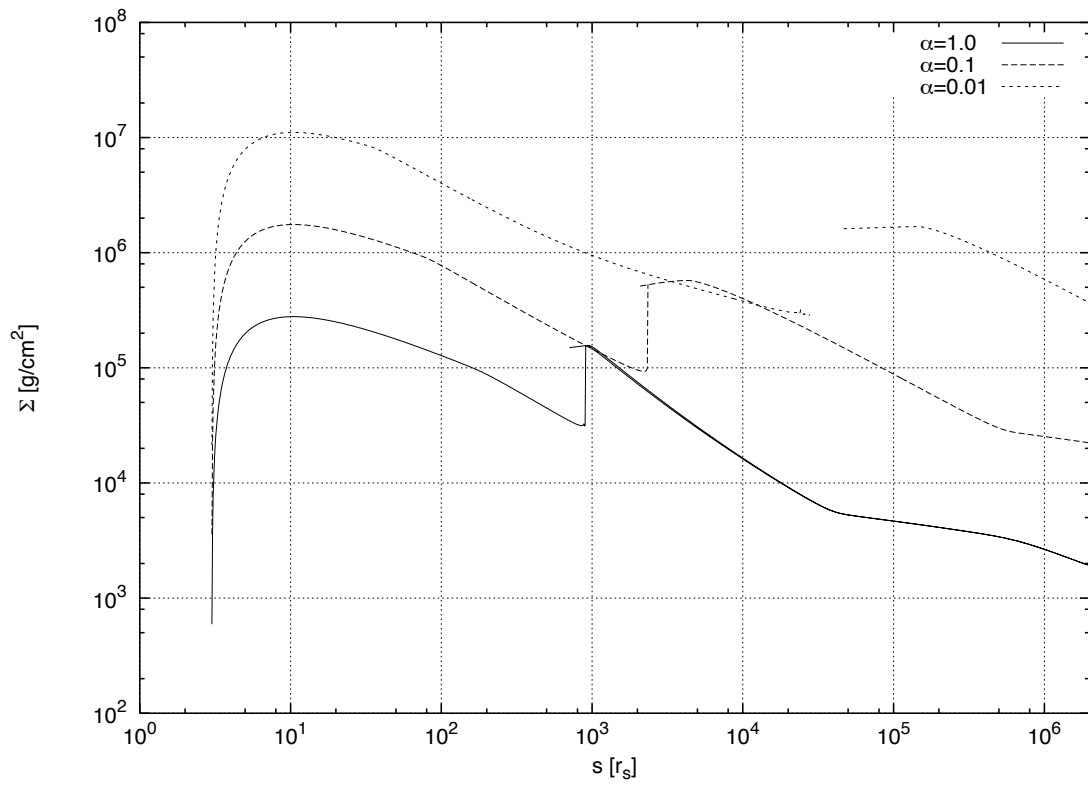


Abbildung 4.31: Die Flächendichte für  $M_* = 10^{10} M_\odot$  und verschiedene  $\alpha$ -Parameter. Die Scheiben sind alle im stoßdissipativen Limit mit Viskosität  $\nu_\delta$  und  $\delta(\alpha)$ .

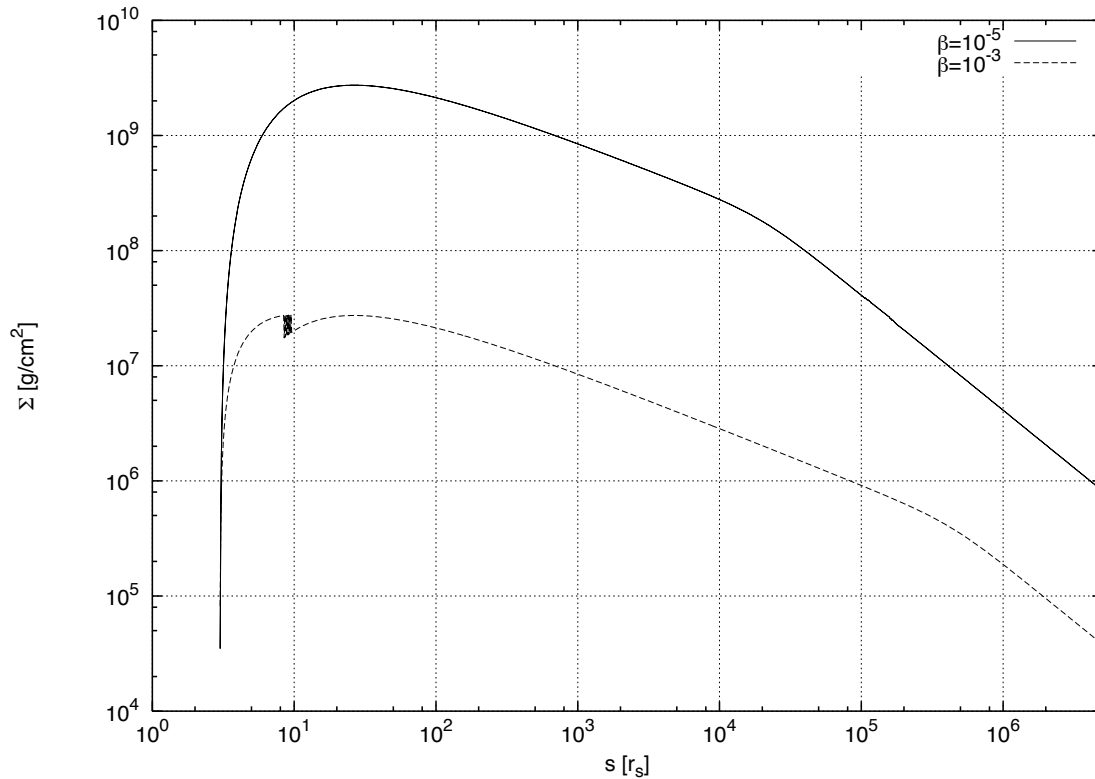


Abbildung 4.32: Die Flächendichte für  $M_* = 10^{10} M_\odot$  und verschiedene  $\beta$ -Parameter.

#### 4.0.6 Konsistenz

Die verwendeten physikalischen Gleichungen basieren auf folgenden Annahmen:

1. Die Scheiben sind geometrisch dünn:  $h/s \ll 1$
2. Die Scheiben sind optisch dick:  $\tau \gg 1$
3. Advektion spielt keine Rolle:  $Q_{\text{adv}}/Q_{\text{vis, rad}} \ll 1$
4. Stationarität, d.h. die physikalischen Größen ändern sich auf Zeitskalen, die weit größer sind, als die viskose Zeitskala.

Auf Bedingung 1 wurde bereits eingegangen, sie ist für die meisten Parameterkombinationen auch gut erfüllt. Mit der optischen Dicke verhält es sich wie mit der relativen Höhe. Sie ist für “vernünftige” Parameter weit größer Eins. Scheiben um supermassive Schwarze Löcher bei gleichzeitig sehr geringem Massenfluss werden in den äußeren Regionen optisch dünn, wenn die Temperatur schon im K-Bereich liegt (siehe Abb. 4.33 und 4.14). Die viskose Heizung ist hier einfach zu ineffektiv.

Advektion spielt in den gerechneten Modellen tatsächlich keine Rolle. Selbst bei der “dicksten” Scheibe um ein Zentralobjekt von  $M_* = 10^5 M_\odot$  und der Akkretionsrate von  $\dot{M} = 100 M_\odot/\text{yr}$  macht die Advektion erst 3 – 4% aus (Abb. 4.34).

Zu Punkt 4 wird im folgenden Abschnitt eingegangen.

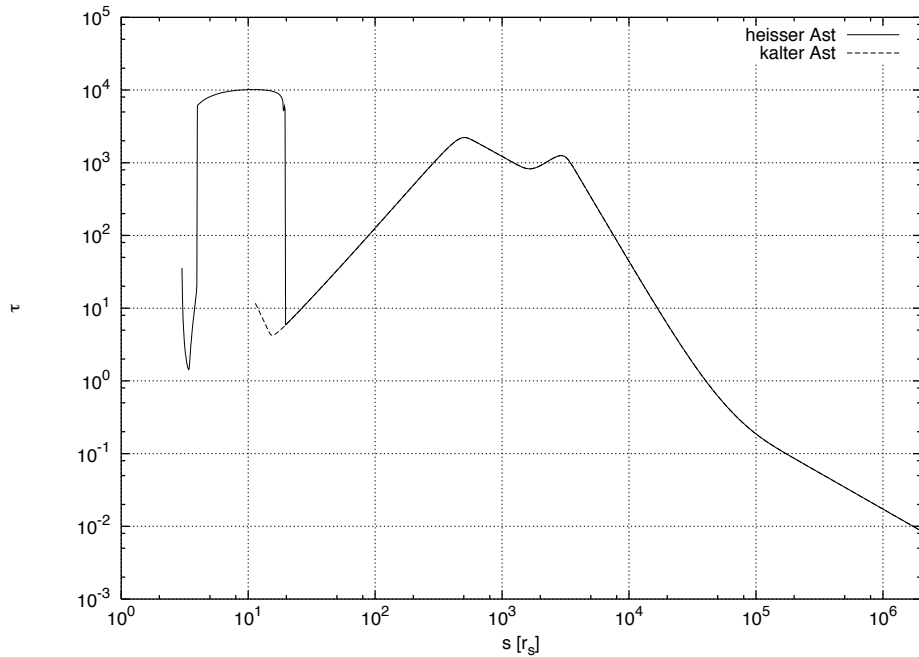


Abbildung 4.33: Die optische Dicke für  $M_* = 10^{10} M_\odot$  und  $\dot{M} = 10^{-3} M_\odot/\text{yr}$ . Sie ist proportional zur Opazität und schwankt dementsprechend. Wegen der inneren Randbedingung gibt es hier zwei  $\text{H}^-$ -Instabilitäten, da am Innenrand die Temperatur zu niedrig für Elektronenstreuung und gebunden-frei, frei-frei Übergänge ist.

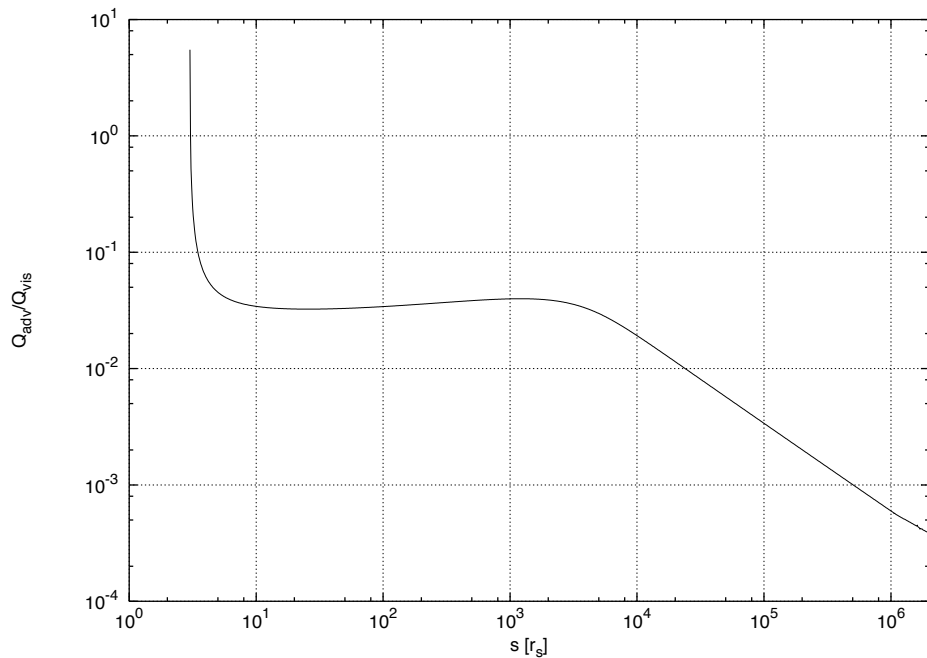


Abbildung 4.34: Das Verhältnis von Advektion zu viskoser Heizung für  $M_* = 10^5 M_\odot$  und  $\dot{M} = 100 M_\odot/\text{yr}$ . Die Kühlung durch Strahlung entspricht genau der Heizung, wie in der Energieerhaltung vorgegeben.

### 4.0.7 Grenzen des Modells

Häufig kommt das Verfahren an einem gewissen Radius zu keiner konsistenten Lösung mehr, insbesondere bei der Wahl sehr hoher Akkretionsraten. Ein großer Massenfluss kann nur durch eine sehr massive Scheibe aufrechterhalten werden. Das Problem tritt auf, wenn der Gradient der Winkelgeschwindigkeit hierbei so stark anwächst, dass die Drehimpulserhaltung (3.3) nicht mehr erfüllt wird<sup>2</sup>. Geht  $\omega' \rightarrow 0$  oder wird positiv, wird die Gleichung unter der Annahme einer konstanten negativen Akkretionsrate unlösbar. Das Problem ist also die äußere Randbedingung, die durch den Massenfluss  $\dot{M}$  vorgegeben ist. Dennoch lassen sich diese selbstgravitierenden Scheiben rechnen, wie die Existenz einer "kalten" Lösung zeigt. Es ist nicht die Eigenmasse der Scheibe das Problem, sondern der auffallend enge radiale Bereich, in dem der Übergang von Keplerscheibe zu voll selbstgravitierender Scheibe geschieht. So war auch leider die Beschreibung der radialen Selbstgravitation durch analytische Terme, wie

1. die Näherung  $M_d = \pi \Sigma s^2$ , oder
2. der Ansatz  $\frac{4\Sigma s^3}{s_0}$  nach Yang and Liu [1990] mit einem (zu definierenden) äußeren Scheibenrand  $s_0$ ,

nicht von Erfolg gekrönt. Wenn also für diese Scheiben der Massenfluß über den Radius variiert, müssen diese zeitabhängig behandelt werden, was jedoch leider über den Rahmen dieser Arbeit hinausgeht.<sup>3</sup>

---

<sup>2</sup>bei den vorgegebenen Randbedingungen

<sup>3</sup>Anmerkung: bei der  $H^-$ -Instabilität ist der Übergang vom einen Lösungsast zum anderen nur über eine unstetige Temperaturänderung (wie gesehen) oder eine unstetige Änderung der Akkretionsrate (nicht für stationäre Modelle) möglich.



# Kapitel 5

## Diskussion und Ausblick

In der vorliegenden Arbeit wurden Stabilität und Struktur selbstgravitierender Akkretions-scheiben um mittel- bis superschwere Schwarze Löcher, wie sie in Galaxienzentren vorkommen, untersucht. Dazu wurde ein neuer Code in C entwickelt, der im numerischen Verfahren das Gleichungssystem löst. Die Scheiben wurden als geometrisch dünn und optisch dick angenommen, was sich für weite Parameterbereiche als zulässig erwies. Die Berechnung des Scheiben-aufbaus erfolgte in der Einzohnennäherung unter Verwendung einer realistischen Opazität für Temperaturbereiche von einigen Kelvin bis zu einigen 10 Millionen Grad. Dabei wurde mit einer turbulenten  $\beta$ -Viskosität gerechnet, deren Turbulenzgeschwindigkeit durch die Schallgeschwindigkeit begrenzt wurde und im Fall nichtselbstgravitierender Bereiche in die  $\alpha$ -Parametrisierung übergeht. Die Modellparameter bewegten sich zwischen  $10^5$  und  $10^{10} M_{\odot}$  des zentralen Schwarzen Lochs und Akkretionsraten von  $10^{-3}$  bis  $100 M_{\odot}/\text{yr}$ . Zum Vergleich wurden auch reine  $\alpha$ -Scheiben gerechnet. Die Selbstgravitation wurde in vertikaler Richtung durch die Näherung einer (unendlich ausgedehnten) dünnen Platte analytisch berücksichtigt, in radialer Richtung wurde die Flächendichte numerisch integriert. Der innere Scheibenrand liegt direkt am letzten stabilen Orbit von drei Schwarzschildradien, während im Prinzip (so sinnvoll) beliebig weit nach außen gerechnet werden kann.

Als Ergebnis ist festzustellen, dass  $\beta$ -Akkretionsscheiben in AGN einerseits fast immer ins stoßdissipative Limit ( $\delta$ -Viskosität) geraten, andererseits mit der ihr eigenen effektiven Viskosität hohe Akkretionsraten und damit ein zügiges Wachstum noch leichter zentraler Schwarzer Löcher ermöglichen, so genügend umgebendes Material (z.B. durch Verschmelzen junger Galaxien, Merging) vorliegt. Diese speziellen Scheiben werden jedoch in den zentralen Regionen dick, so dass dort der vorliegende Gleichungssatz zur Beschreibung nicht mehr gültig ist, weiter außen allerdings schon.

Der Code ist leicht ausbaufähig, so sollte an einem realistischeren Übergang zwischen den beiden viskosen Parametrisierungen gearbeitet werden, wobei der Übergang selbst Ursache von Instabilitäten sein könnten. Das mittlere Molekülgewicht sollte auch differenziert eingebracht werden.

Es wurde zwischen  $10^4$  und  $10^3$  K eine (für  $\alpha$ -Scheiben bekannte) thermisch-viskose Instabilität gezeigt, verursacht durch einen steilen Gradienten in der Opazität, wenn  $\text{H}^-$  der dominante Absorber ist. Desweiteren wurde festgestellt, dass alle Scheiben instabil gegenüber achsensymmetrische Störungen sind, sobald sie stark vertikal selbstgravitierend werden. Zeitabhängige Rechnungen sollten dies auf mögliche Fragmentation der Scheibe hin untersuchen.

Für sehr hohe Akkretionsraten, was einer massiven Scheibe entspricht konnten teilweise keine konsistenten Lösungsabschnitte gefunden werden, nämlich im rapiden Übergang zu voller Selbstgravitation. Hier ist die äußere Randbedingung einer konstanten Massenakkretionsrate nicht mehr zulässig. Dazu ist auch näher zu untersuchen, wie die Selbstgravitationsterme genauer aussehen und inwieweit die analytischen Näherungen im zeitabhängigen Modell anwendbar sind.

# Literaturverzeichnis

- K. R. Bell and D. N. C. Lin. Using FU Orionis outbursts to constrain self-regulated protostellar disk models. *Astrophysical Journal*, 427:987–1004, June 1994.
- M. Biermann. *Akkretionsscheiben-Modelle mit einer verallgemeinerten, Reynolds-kritischen Turbulenz in aktiven galaktischen Kernen und um Protosterne*. PhD thesis, ITA Uni Heidelberg, 2001.
- W. J. Duschl. Formation and Feeding of Massive Black Holes in the Early Universe. In *IAU Colloq. 184: AGN Surveys*, 2001.
- W. J. Duschl, P. A. Strittmatter, and P. L. Biermann. A note on hydrodynamic viscosity and selfgravitation in accretion disks. *A&A*, 357:1123–1132, May 2000.
- J. Frank, A. King, and D. Raine. *Accretion Power in Astrophysics*. Accretion Power in Astrophysics, ISBN 0521408636, Cambridge University Press, 1992., 1992.
- J.-M. Huré, D. Richard, and J.-P. Zahn. Accretion discs models with the  $\beta$ -viscosity prescription derived from laboratory experiments. *A&A*, 367:1087–1094, Mar. 2001.
- B. Paczyński. A model of selfgravitating accretion disk. *Acta Astronomica*, 28:91–109, 1978.
- B. Paczyński and P. J. Wiita. Thick accretion disks and supercritical luminosities. *A&A*, 88:23–31, Aug. 1980.
- W. H. Press, S. A. Teukolsky, W. T. Vetterling, and B. P. Flannery. *Numerical recipes in C. The art of scientific computing*. Cambridge: University Press, —c1992, 2nd ed., 1992.
- N. I. Shakura and R. A. Sunyaev. Black holes in binary systems. Observational appearance. *A&A*, 24:337–355, 1973.
- F. Shu. *Physics of Astrophysics, Vol. II: Gas Dynamics*. Published by University Science Books, 648 Broadway, Suite 902, New York, NY 10012, 1991., 1991.
- A. Toomre. On the gravitational stability of a disk of stars. *Astrophysical Journal*, 139:1217–1238, May 1964.
- L. Yang and X. Liu. Radial self-gravity of accretion disc around supermassive black holes. *Astrophysics and Space Science*, 172:293–304, Oct. 1990.

## Danksagung

Zuerst möchte ich mich herzlich bei Herrn Prof. Dr. W. J. Duschl für die Bereitstellung des vorliegenden Themas und der Betreuung der Arbeit bedanken. Er war immer Fragen aufgeschlossen und gab Anregungen, ließ mir dabei aber Freiraum für eigene Überlegungen.

Ganz besonders möchte ich mich bei Herrn Prof. Dr. K.-H. Kampert bedanken, der es mir überhaupt erst ermöglichte, diese Arbeit extern durchzuführen, sowie für seine Bereitschaft, sie zu begutachten.

Michael Mayer bin ich zu großem Dank verpflichtet, der mir oft wertvolle Hinweise zu numerischen Verfahren gab und mit Interesse meine Arbeit verfolgte.

Andrea Ferrarotti danke ich herzlich für die aufmunternden Gespräche und heitere Atmosphäre.

Bei allen anderen Mitgliedern des Instituts für Theoretische Astrophysik möchte ich mich für das ruhige und freundliche Arbeitsklima bedanken. Besonders genannt seien mein Zimmergenosse Tobias Illenseer, Michael Wehrstedt und F. Gamgami.

Ein besonderer Dank geht an meinen Freund Simon Hügel, der mich häufig moralisch unterstützt hat und für die netten Besuche in Heidelberg.

Der größte Dank gilt meiner Mutter, die während meines Studiums immer zu mir gehalten und unterstützt hat und dadurch sehr zu dessen Gelingen beigetragen hat.

Erklärung:

Ich versichere, dass ich diese Arbeit selbständig verfasst und keine anderen als die angegebenen Quellen und Hilfsmittel benutzt habe.

Karlsruhe, den \_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_  
Unterschrift